

第5章 機構と力学

第5章 機構と力学

第1節 機構解析に必要な機能

機構解析の全体像を理解するために、機構解析に必要な機能を示す。

(1) 機械要素モデル

機構を解析するのに必要な機械要素は、関節（回転ジョイント、並進ジョイント、歯車、カム、スクリージョイント、球ジョイント、ユニバーサルジョイント等）、ばね、ダンパ、アクチュエータの力要素である。

(2) 運動学解析

機構のアクチュエータに運動を与えたとき、機構全体がどのような運動をするかを解析するものである。これは、機構の任意点の時間ごとの位置、速度そして加速度を求める問題である。

(3) 動力学解析

動力学解析には、順動力学解析と逆動力学解析の二種類の解析がある。順動力学解析は、アクチュエータに力を与えたとき、機構がどのように運動するか求める解析である。これは、関節に力あるいはトルクを与えて機構の運動方程式を解く力学の解析である。逆動力学解析は、運動学で求めた運動を実現するために必要な各関節の力／トルクを求める解析である。

(4) 平衡解析

機構が速度も加速度も0になった状態を求める解析である。機構の全てのアクチュエータがパワーオフになったとき、どのような形態で停止するか求める解析である。

(5) 組立解析

機構をなす機械要素の平面あるいは空間の位置と姿勢を求めるものである。組立解析は、近似値から、機構が構成されるようなある程度の精度を持った値を求めるものである。

第2節 使用する記号の定義

この章では、以下のような記号を使用する。

nb : 機構の全 body 数

nc : 一般化座標の数 ($3*nb$ 個)

dof : 機構の自由度

Φ : 拘束式

Φ_q : ヤコビアン

v : 速度項

γ : 加速度項

m_i : body i の質量

Σ : ワールド座標系

Σ' : x' - y' - z' 座標系 (body に固定された座標系)

Σ'' : x'' - y'' - z'' 座標系

J : Σ' で定義された慣性マトリクス

n : body に働く外トルク

F : body に働く外力

r : $[x, y]^T$

A : 座標変換マトリクス

C : body に固定された二つの座標系 Σ'' から Σ' への変換を示すマトリクス

A_{ij} : Σ_j' から Σ_i' への座標変換マトリクス

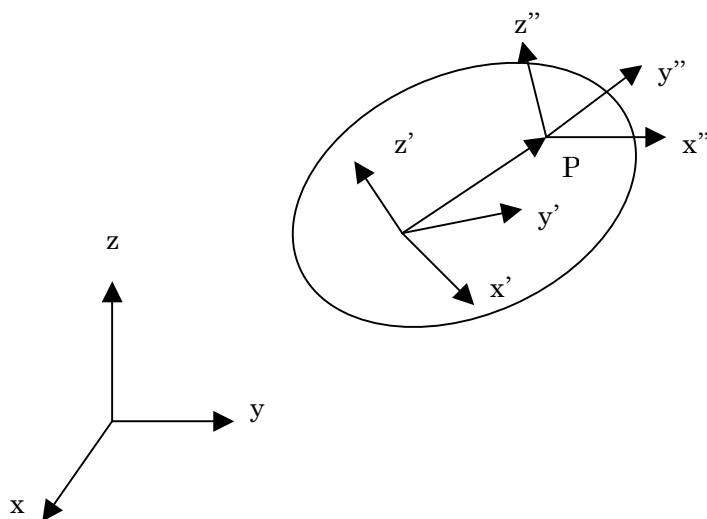


図5-1 ここで使用する記号

第3節 運動学

3-1 用語の定義

ここでは、運動学で使用される言葉の定義を行う。

(1) 剛体

運動中も距離が変わらない二つの質点の集合。従って、剛体上に定義された位置ベクトルは、剛体の運動中も剛体に対しては相対的に運動しない。剛体を **body** と呼ぶ。Ground (地面) も **body** の一つとして取り扱う。

(2) 機構

ある運動をさせるために **body** を連結した集まりである。

(3) 運動学

機構の位置、速度、加速度の解析を指す。

(4) 総合と解析

機構を設計することを総合と呼ぶ。できあがった機構の運動学などを論ずることを解析と呼ぶ。

(5) 座標系

全ての **body** の位置、姿勢を決定するための値の集合である。直交座標系 (Σ)、と相対座標系 (Σ' 、 Σ'') がある。

(6) コンフィグレーション

機構の位置と姿勢をまとめてコンフィグレーションと呼ぶ。

(7) 自由度

機構のコンフィグレーションを一意に決定するための、必要十分な座標系の個数。

(8) リンク、対偶、ジョイント (関節)

機構をなす **body** のことをリンクと呼ぶ。隣り合うリンクの拘束を対偶あるいはジョイントと呼ぶ。

(9) 運動学拘束

body の運動を制限するもので、ジョイントも含め拘束と呼ぶ。

3-2 運動学拘束

本節では、運動学拘束について述べる。二つの body i と body j は相対的に 3 自由度の運動 (x,y,φ) を行うが、次に述べる運動学拘束により相対運動が制限される。

(1) 回転関節

回転関節は、図 5-2 のように body i と body j に共通な点 P の回りの相対回転が可能である。一方の body が固定されていれば、他方の body は回転の 1 自由度を持つことになる。従って、回転関節は一組の連結された body から 2 自由度を除去している。

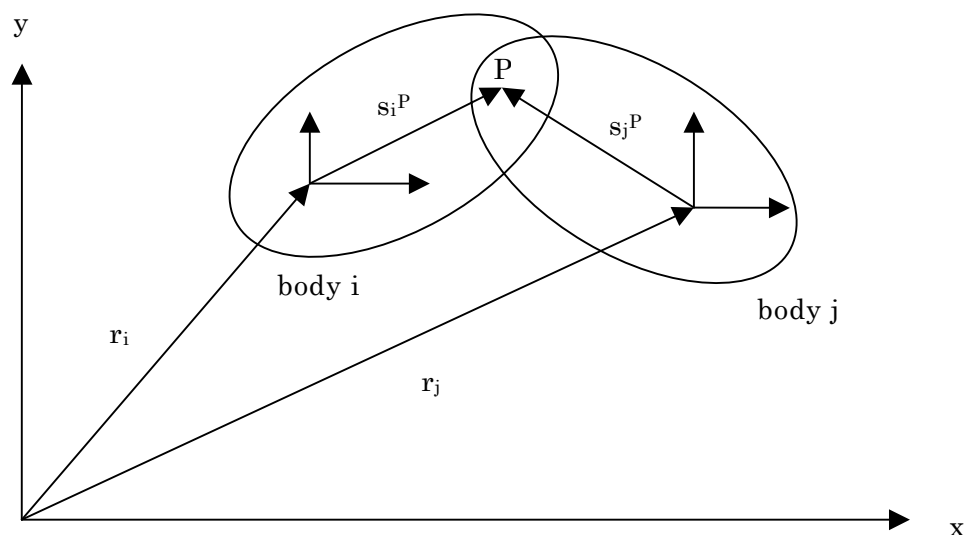


図 5-2 回転関節

回転関節の拘束式は次式のように表される。

$$\begin{aligned}\Phi^{r(i,j)} &= r_i + s_i^P - r_j - s_j^P \\ &= r_i + A_i s_i^P - r_j - A_j s_j^P\end{aligned}$$

(2) 並進関節

並進関節は共通の軸に沿って2個の body が相対的に直線運動できる。物理的には、一つの body 上の直線溝に精密にはめ合わされているもう一つの body の直線ブロックとして定義でき、それらの共通の中心線に沿って直動する。1つの body が固定されれば、もう一方の body の自由度は直動の1自由度だけになる。このように、並進関節は2個の body から2つの自由度を除去することになる (図 5-3)。

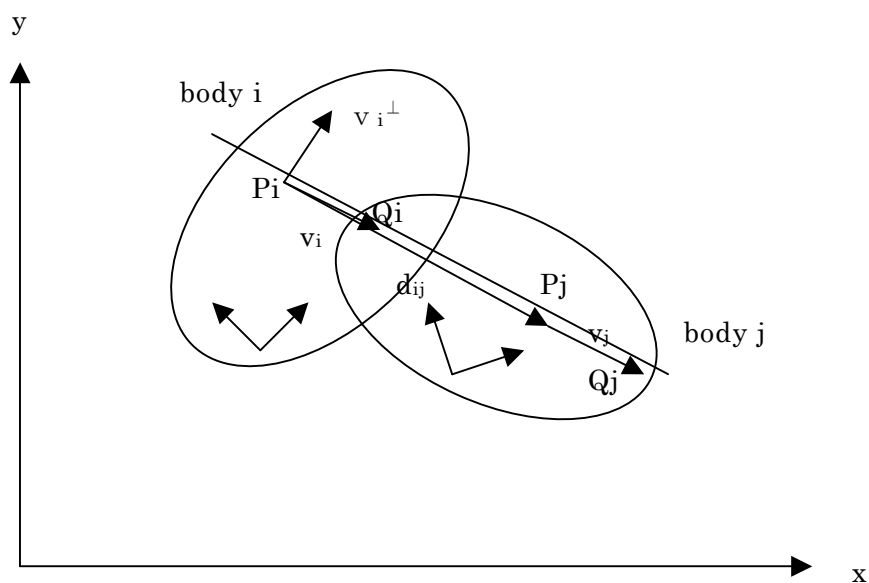


図 5-3 並進関節

並進関節の拘束式は次式のように表される。

$$\begin{aligned}
 \Phi^{(i,j)} &= \begin{bmatrix} (v_i^\perp)^T d_{ij} \\ (v_i^\perp)^T v_j \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} v_i^T R^R A_i^T (r_j + A_j s_j^P - r_i - A_i s_i^P) \\ v_i^T R^T A_i^T A_j v_j' \end{bmatrix} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(3) 複合関節

多くの運動学の応用例では、body の唯一つの機能が、回転と並進関節の組み合わせを用いて、2つの body を結びつけるものがある。このような結合はカプラと呼ばれ、body として扱う必要はない。このような組み合わせを複合関節とみなして、基本的な拘束式を作成し、カプラを表す一般化座標を導入しない。

a. 回転-回転関節

図に示す回転-回転関節は、二つの回転関節としても表すことができるが、中間リンクの質量が無視できるとすると、ベクトル d_{ij} の長さが一定で、2点 P_i 、 P_j 間の距離 ($=C$) に等しいという拘束として定義できる (図 5-4)。

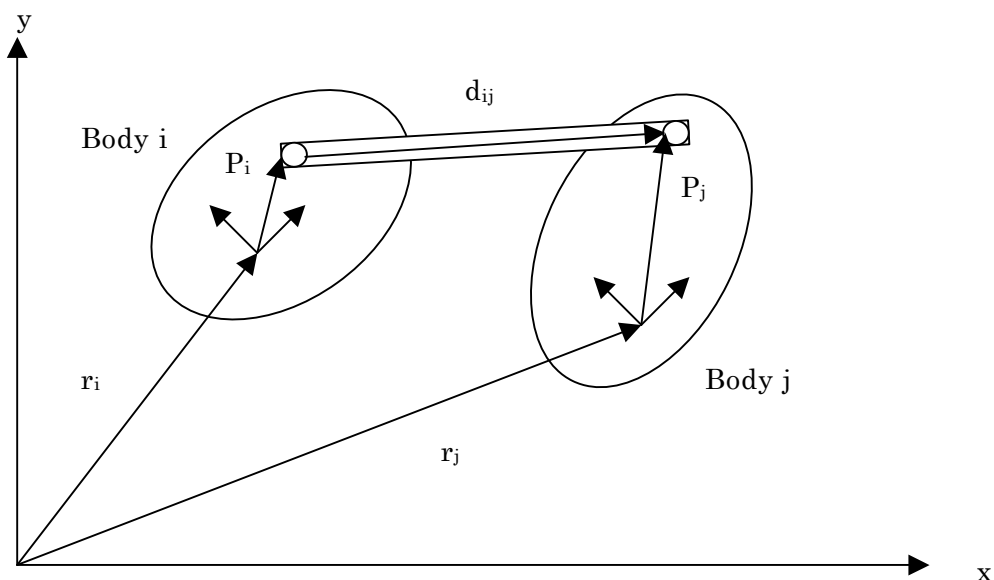


図 5 - 4 回転-回転関節

回転-回転関節の拘束式は次式のように表される。

$$\Phi^{rr(i,j)} = (x_i^P - x_j^P)^2 + (y_i^P - y_j^P)^2 - C^2 = 0$$

b. 回転-並進関節

図 5-5 は回転-並進関節を示している。Body i と body j は、Body j 上に回転関節をもち、Body i 上に並進関節をもつカプラで結合されている。2つの異なった点 P_i と Q_i が body i の直動軸線上にある。回転関節は直動軸線から一定距離 C だけ離れている。もし、body j が固定されている場合には、カプラと body i も回転できる。さらに、body i はベクトル v_i の方向に直進できる。従って、自由度は 2 である。拘束式は直動軸から回転関節までの距離 C で定義される。

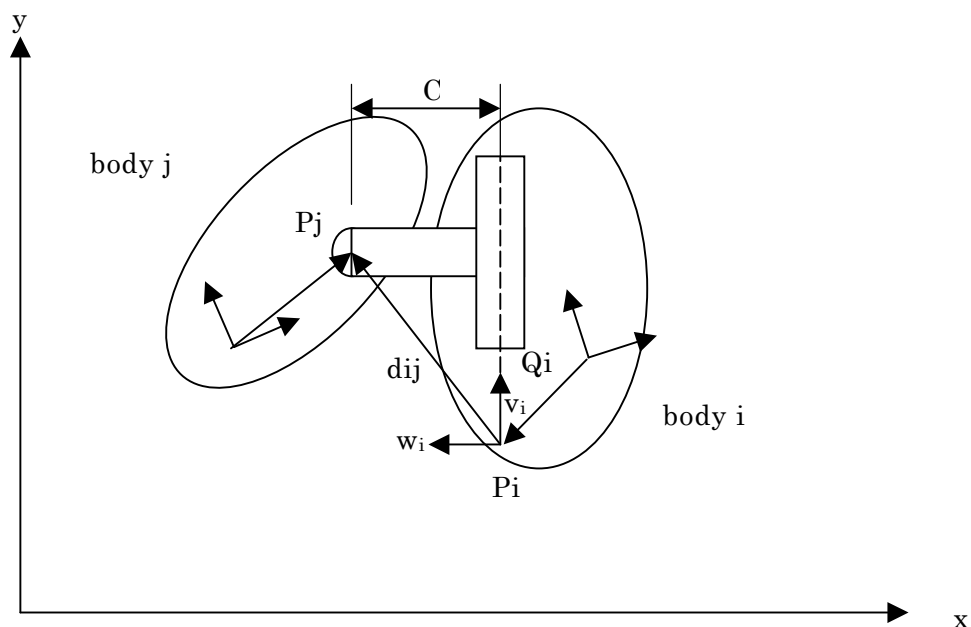


図 5-5 回転-並進関節

回転-並進関節の拘束式は次式のように表される。

$$\Phi^{r(i,j)} = \frac{1}{v_i^T} v_i^T R^T A_i^T (r_j + A_j s_j^P - r_i - A_i s_i^P) - C = 0$$

c. 歯車

歯車の例を図 5-6 に示す。body i と body j のそれぞれの中心を P_i 、 P_j とし、歯車の最初のかみ合い点を Q_i 、 Q_j とする。歯車の拘束条件は、body i と body j が滑らないで互いに回転することである。

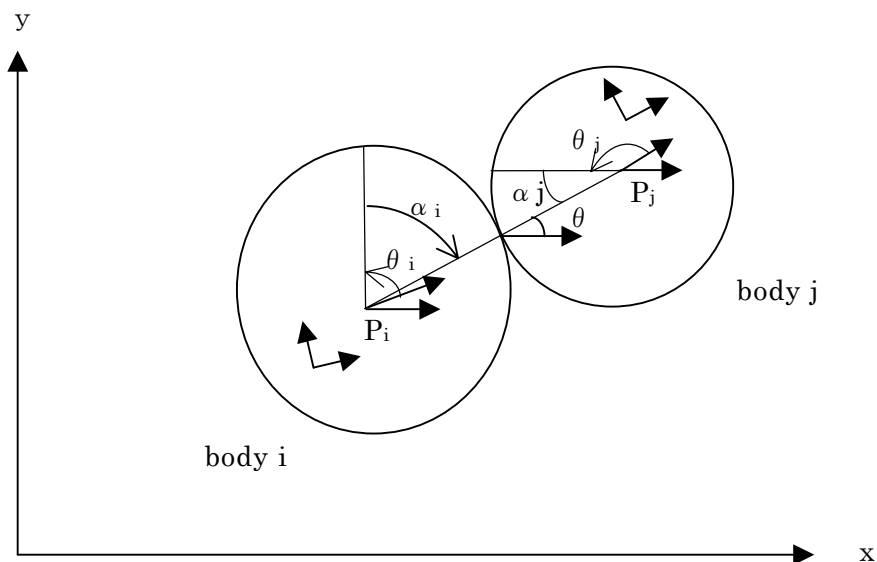


図 5 - 6 歯車

歯車の拘束式は次式のように表される。ここで、 $u^\perp \equiv [-\sin \theta \quad \cos \theta]^T$ とする。

$$\begin{aligned} \Phi^{g(i,j)} &= (r_j^P - r_i^P)^T u^\perp \\ &= (x_j^P - x_i^P) \sin \theta - (y_j^P - y_i^P) \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

d. カム・フォロワ

図5-7のように、カム・フォロワの拘束は、接触における位置と傾きが等しいことである。

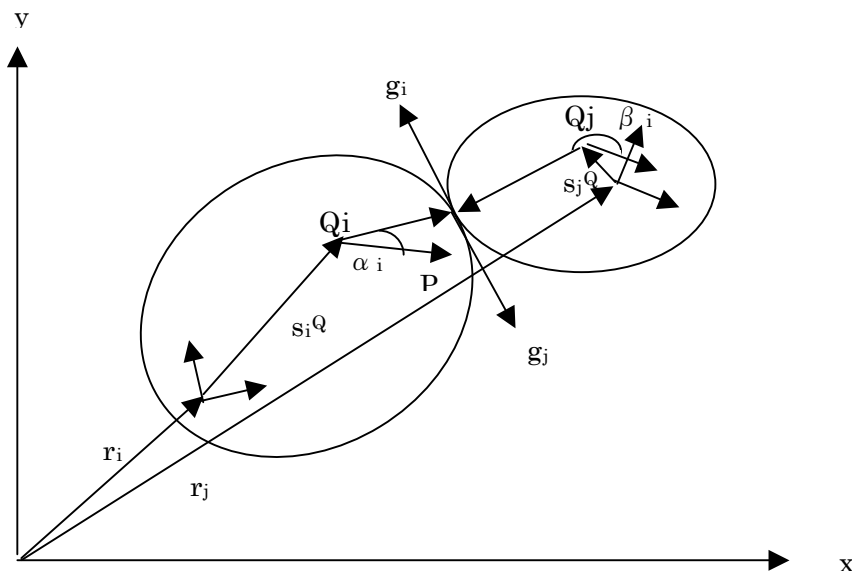


図5-7 カム・フォロワ

カム・フォロワの拘束式は次式のように表される。ここで、 $\rho(\alpha)$ は $a(\alpha)$ の長さで、 $u'(\alpha) = [\cos \alpha \quad \sin \alpha]^T$ である。

$$\Phi^{cf(i,j)} = \begin{bmatrix} r_i + A_i(s_i^{\prime Q} + \rho_i u_i') - A_j(\rho_j u_j' + s_j^{\prime Q}) - r_j \\ -g_i^T B_{ij} g_j' \end{bmatrix} = 0$$

上式の第1式は body i と body j が点 P で共有していることを、第2式は g_i と g_j が平行であることを示している。

e. その他の拘束

多くの機構では、body の運動はベースに対して、すなわち静止 x-y 座標系に対して拘束されている。

①絶対距離拘束

図 3-8 に示すように、絶対距離拘束は body i 上の点 P_i と平面上の固定点 (C_1, C_2) との距離が一定であることである。

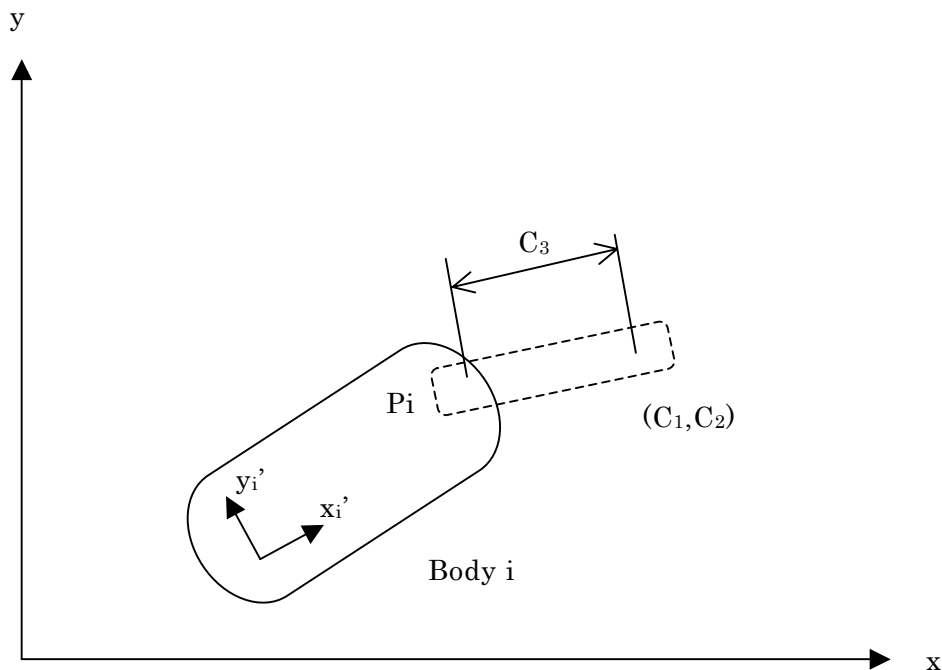
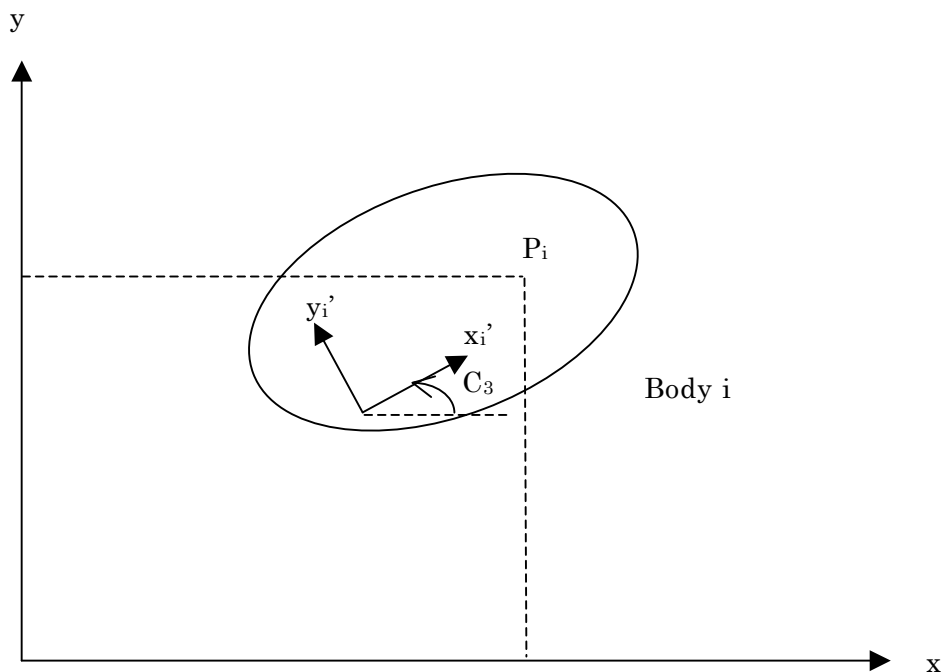


図 5 - 8 絶対距離拘束

$$\Phi^{ad(i,j)} = (r_i^P - C)^T (r_i^P - C) - C_3^2 = 0$$

②絶対 x, y, ϕ 拘束

図 5-9 に示すように、この拘束は body i に固定された点 P_i の座標 x_i, y_i, ϕ_i がそれぞれ拘束されることである。

図 5 - 9 絶対 x, y, ϕ 拘束

$$\Phi^{ax(i)} \equiv x_i^P - C_1 = 0$$

$$\Phi^{ay(i)} \equiv y_i^P - C_2 = 0$$

$$\Phi^{a\phi(i)} \equiv \phi_i - C_3 = 0$$

3-3 駆動拘束条件

多くの機械システムでは、運動学的な構造に加えて、ある位置座標や body 間の相対位置の時系列をアクチュエータの入力で制御されている。ロボットやNC工作機械はその代表的な例である。機構の運動の時系列を唯一つに決定するには、そのシステムの自由度に相当する数の入力が必要になる。

この節では、運動学解析で用いる、駆動拘束と呼んでいる標準的なドライバについて述べる。

(1) 回転駆動

回転駆動は、図 5-10 のように body i と body j が点 P を共有し、点 P において定義された座標系に対して、相対的に回転運動を行う。

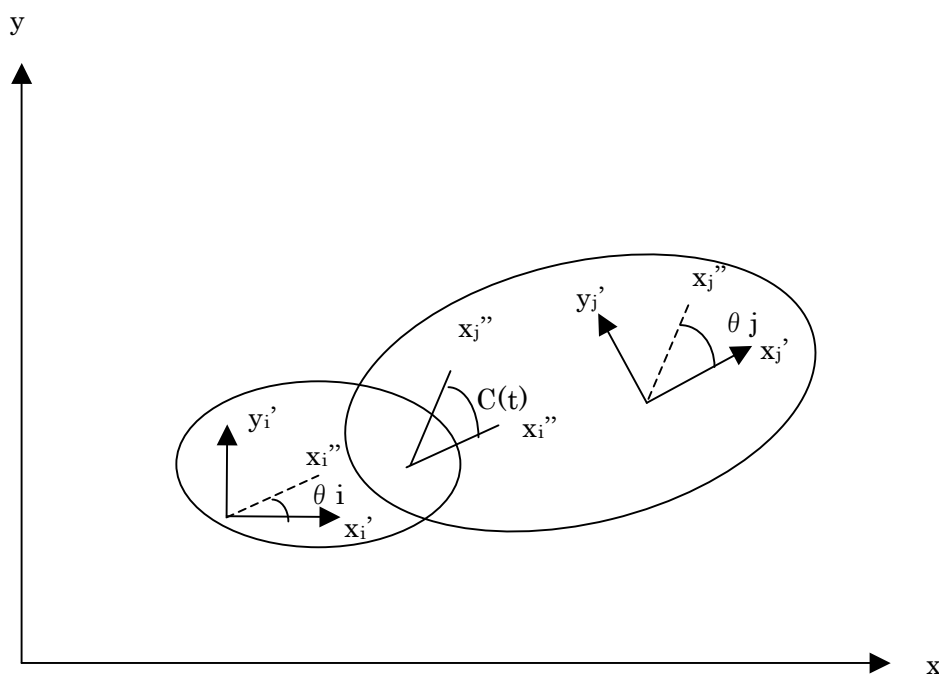


図 5-10 回転駆動

$$\Phi^{rrd(i,j)} = (\phi_j + \theta_j) - (\phi_i + \theta_i) - C(t) = 0$$

(2) 並進駆動

並進駆動は、図 5-11 のように body i と body j の点 Pj の距離が C(t) となる拘束である。

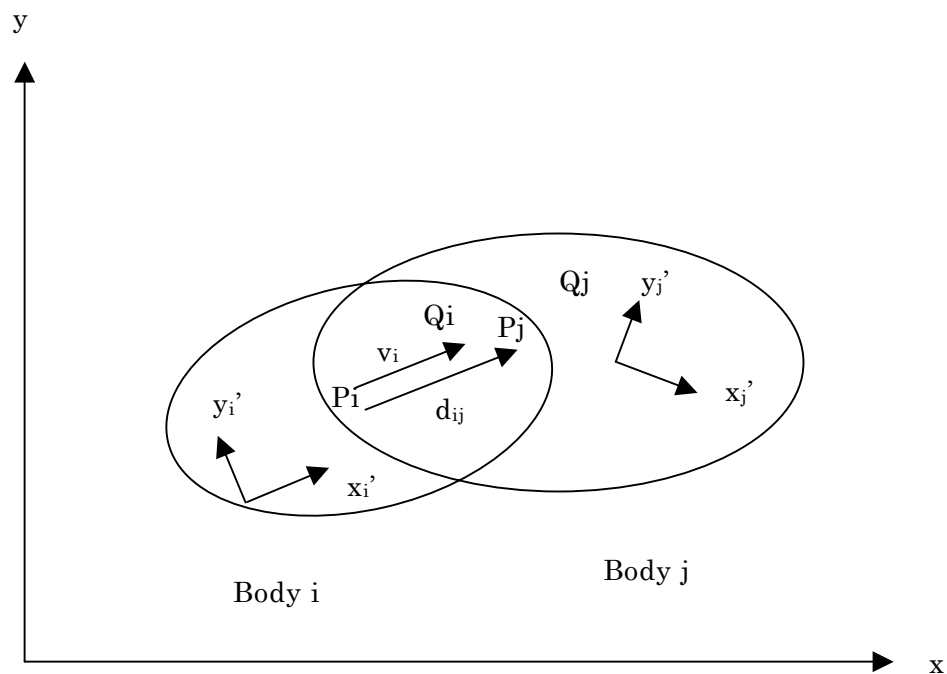


図 5 - 1 1 並進駆動

$$\Phi^{idd(i,j)} = v_i^T A_i^T (r_j - r_i) + v_i^T A_{ij} s_i'^P - v_i^T s_i'^P - v_i C(t) = 0$$

(3) 絶対駆動

絶対駆動は、図 5-12 のように body i 上の点 P_i の x, y, ϕ に関する拘束がある。

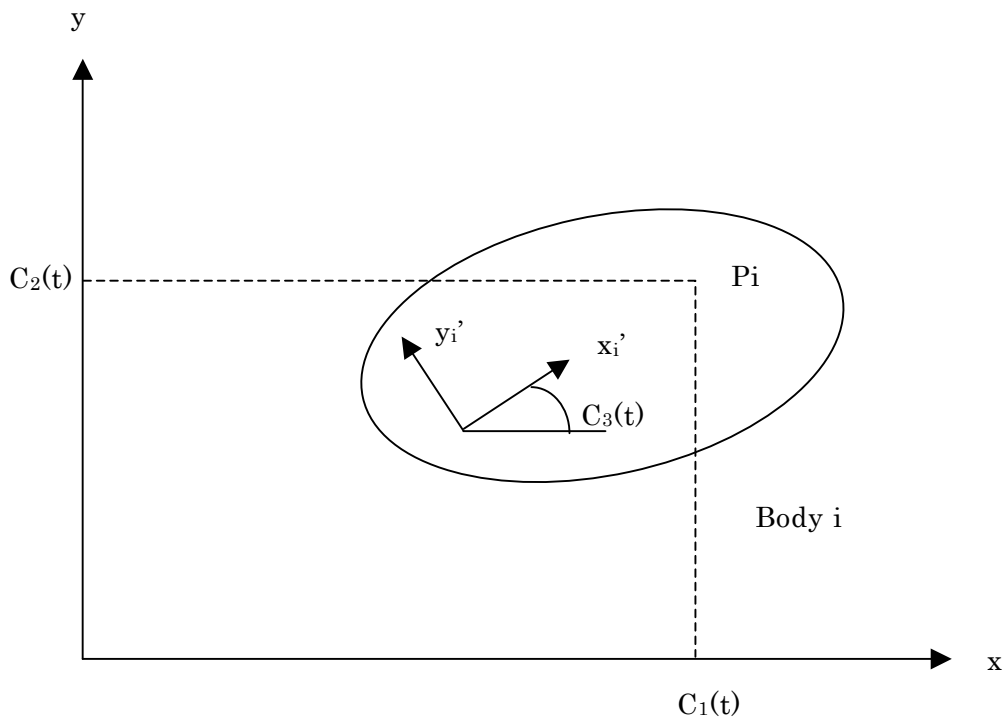


図 5 - 1 2 絶対駆動

$$\Phi^{axd(i)} = x_i^P - C_1(t) = 0$$

$$\Phi^{ayd(i)} = y_i^P - C_2(t) = 0$$

$$\Phi^{a\phi d(i)} = \phi_i - C_3(t) = 0$$

(4) 相対駆動

相対駆動は、図 5-13、図 5-14 のように body i と body j について拘束が定義できる。

$$\Phi^{rxd(i,j)} = x_j^P - x_i^P - C_1(t) = 0$$

$$\Phi^{ryd(i,j)} = y_j^P - y_i^P - C_2(t) = 0$$

$$\Phi^{r\phi d(i,j)} = \phi_j - \phi_i - C_3(t) = 0$$

$$\Phi^{rdd(i,j)} = (x_j^P - x_i^P)^2 + (y_j^P - y_i^P)^2 - (C_4(t))^2 = 0$$

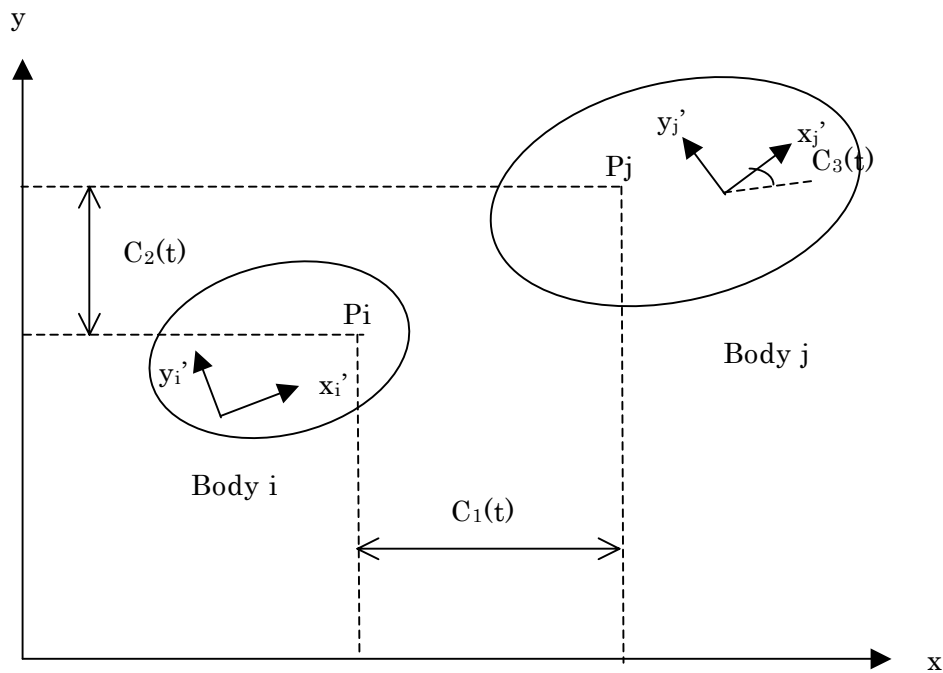


図 5 - 1 3 相対駆動

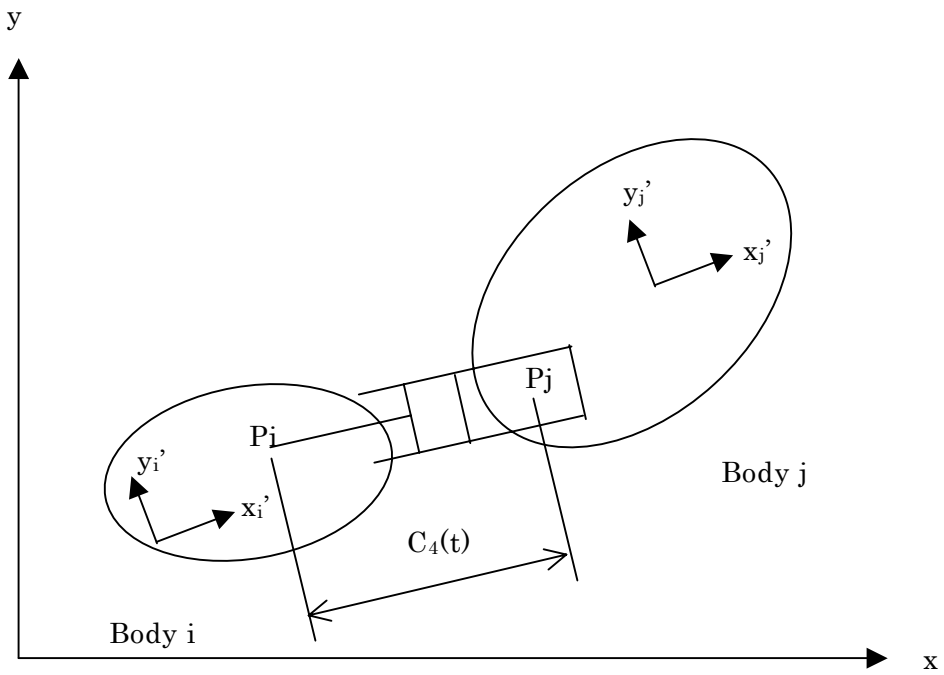


图 5 - 1 4 相对距离驱动

3-4 運動の位置、速度、加速度解析

(1) 運動学解析

機構の nh 個の運動学拘束を

$$\Phi^K(q) \equiv [\Phi_1^K(q), \dots, \Phi_{nh}^K(q)] = 0$$

とし、 dof 個の駆動拘束を

$$\Phi^D(q,t) \equiv [\Phi_1^D(q,t), \dots, \Phi_{dof}^D(q,t)] = 0$$

とする。運動学拘束式と駆動拘束式を合わせて

$$\Phi(q,t) = \begin{bmatrix} \Phi^K(q) \\ \Phi^D(q,t) \end{bmatrix}_{nc \times 1} = 0$$

とする。ここで、次のことに注意する。

- ① nb 個の body からなる機構は一般化座標 $nc = 3 \times nb$ 個を持つ。ただし、カムでは形状を定義する回転角が追加される。
- ② 運動学拘束が nh 個であるとき、その機構の自由度は $dof = nc - nh$ である。
- ③ 駆動拘束は dof 個必要である。

(2) 位置解析

駆動拘束の時間変化に従って $\Phi(q,t) = 0$ を満たすように他の一般化座標を求め。数値解法としてニュートン・ラブソン法が用いられる。

(3) 速度方程式

拘束式 Φ を時間で微分して得られる、速度方程式

$$\Phi_q \dot{q} = -\Phi_t \equiv v$$

を解くことにより \dot{q} を求める。

(4) 加速度方程式

速度方程式を時間で微分して得られる、加速度方程式

$$\Phi_q \ddot{q} = -(\Phi_q \dot{q})_q \dot{q} - 2\Phi_{qt} \dot{q} - \Phi_{tt} \equiv \gamma$$

を解くことにより \ddot{q} を求める。

第 4 節 動力学

4-1 拘束のない運動方程式

図 5-15 のように、剛体が平面上を自由に運動しているとする。この body の重心に座標系を設定する。その剛体の重心に力 F 、モーメント n が働くとき、運動方程式は次式のようにになる。ここで、 m は body の質量、 r は x - y 座標系から x' - y' 座標系の原点へのベクトル、 ϕ は x と x' 間の角度、 J' は物体の重心まわりの慣性モーメントである。

$$m\ddot{r} = F$$

$$J'\ddot{\phi} = n$$

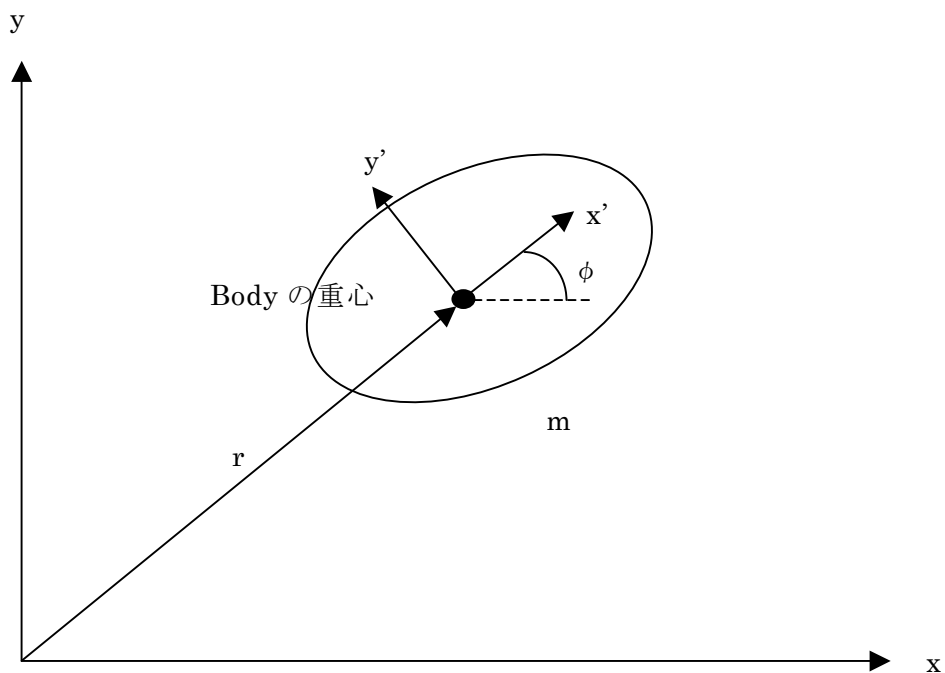


図 5-15 body に作用する力

4-2 慣性モーメント

慣性モーメントは body の回転のしにくさを示す物理量である。慣性モーメントは次のように表される。

$$J'' = \int_m s^{PT} s^P dm$$

図 5-16 に示すように、慣性モーメントは $s^{PT} s^P$ (重心からの距離の 2 乗) と dm (微小質量) をかけたものを body 全体にわたって積分することで求められる。上式は、 $x''-y''$ 座標系に関する慣性モーメントである。重心まわりの慣性モーメントは次式のようにになる。

$$J' = J'' - m|\rho''|^2$$

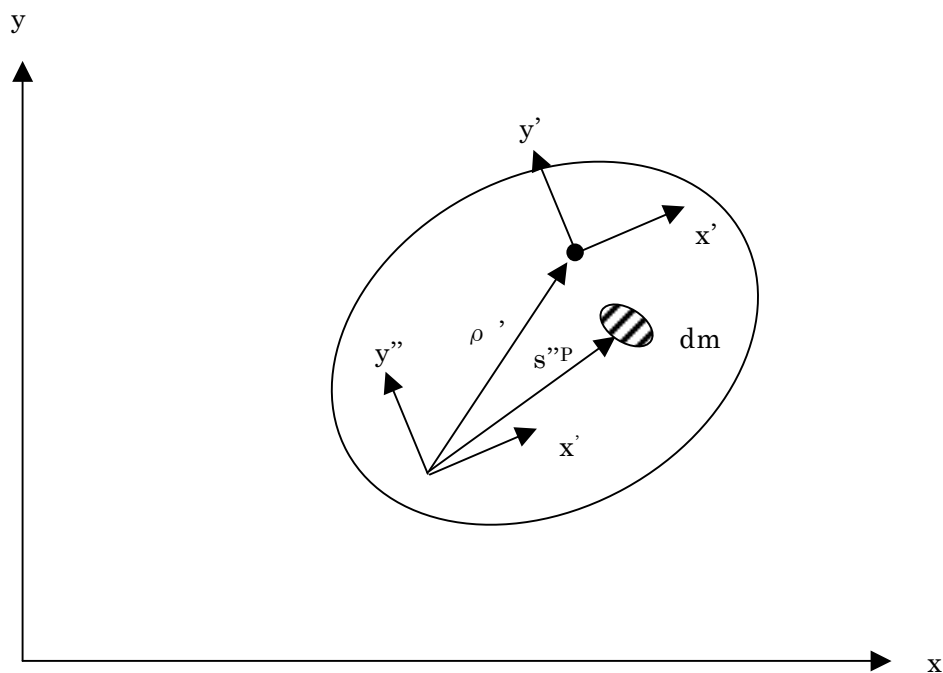


図 5-16 重心の位置

4-3 一般化力と力要素

図 5-17 に示すように、body 上の点 P に力 F^P とトルク n が働いているとする。このとき座標系 $x'-y'$ にかかる力とトルクは次のようになる。ここで、 Q を一般化力と言う。

$$Q = \begin{bmatrix} A_i \\ (Rs'^p)^T \end{bmatrix} F'^p + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{bmatrix}$$

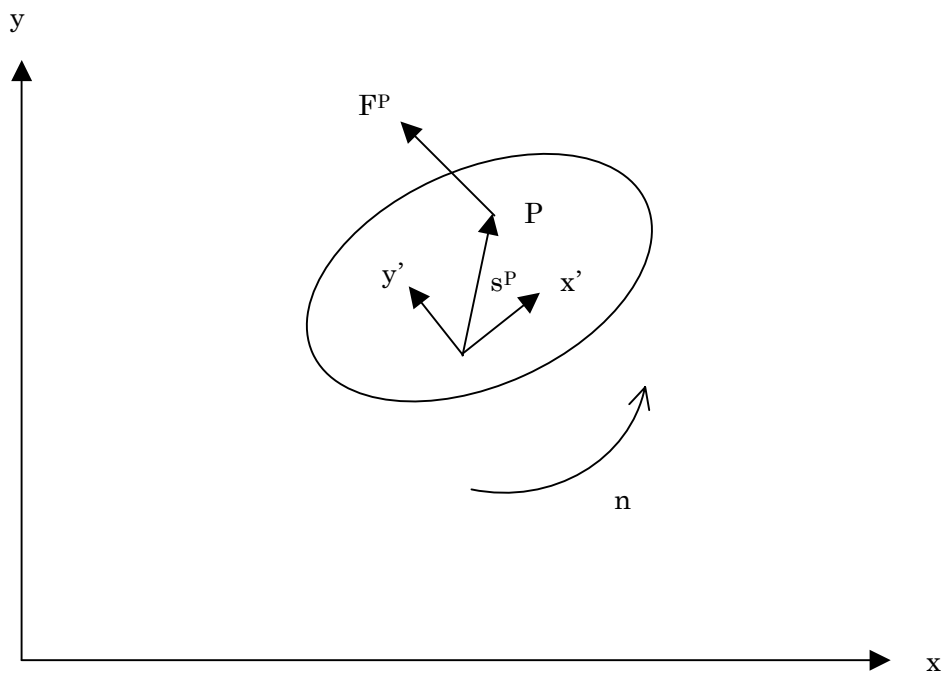


図 5-17 P 点に作用する力

(1) 直動ばね・ダンパ・アクチュエータ

図 5-18 に直動のばね、ダンパ、アクチュエータからなる力要素を示す。

$$l^2 = d_{ij}^T d_{ij}$$

とすると、力要素の出力 f は

$$f = k(l - l_0) + c\dot{l} + F(l, \dot{l}, t)$$

である。ここで、 k : ばね定数、 l_0 : l の自然長、 c : ダンピング係数、 F : アクチュエータによる力要素関数である。この力要素により body i と body j に及ぼす一般化力/トルクは次式で表される。

$$Q_i = \frac{f}{l} \begin{bmatrix} d_{ij} \\ d_{ij}^T B_i s_i' \end{bmatrix}$$

$$Q_j = -\frac{f}{l} \begin{bmatrix} d_{ij} \\ d_{ij}^T B_j s_j' \end{bmatrix}$$

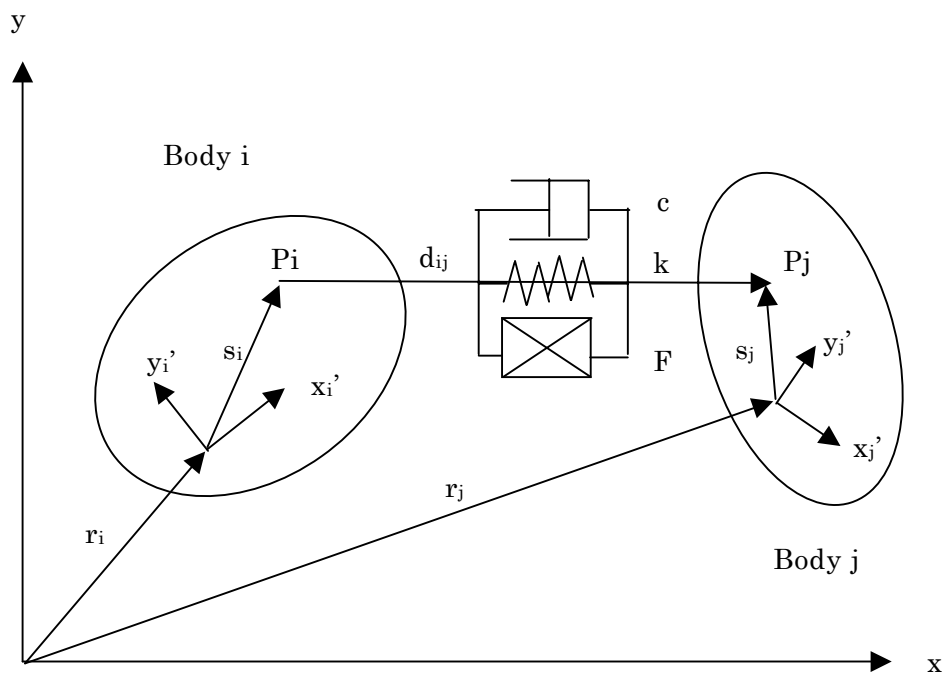


図 5-18 直動ばね・ダンパ・アクチュエータ

(2) 回転ばね・ダンパ・アクチュエータ

図 5-19 に直動のアクチュエータ、ばね、ダンパからなる力要素を示す。

$$\theta_{ij} = \phi_j - \phi_i$$

とすると、この力要素の出力トルクは次のようになる。

$$n = k_{\theta}(\theta_{ij} - \theta_0) + c_{\theta}\dot{\theta}_{ij} + N(\theta_{ij}, \dot{\theta}_{ij}, t)$$

ここで、 k_{θ} : ばね定数、 θ_0 : ばねの自然長、 c_{θ} : ダンピング定数、 N : アクチュエータによるトルクの関数である。body i と body j に及ぼす一般化力 / トルクは次式で表される。

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{bmatrix} \quad Q_j = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{bmatrix}$$

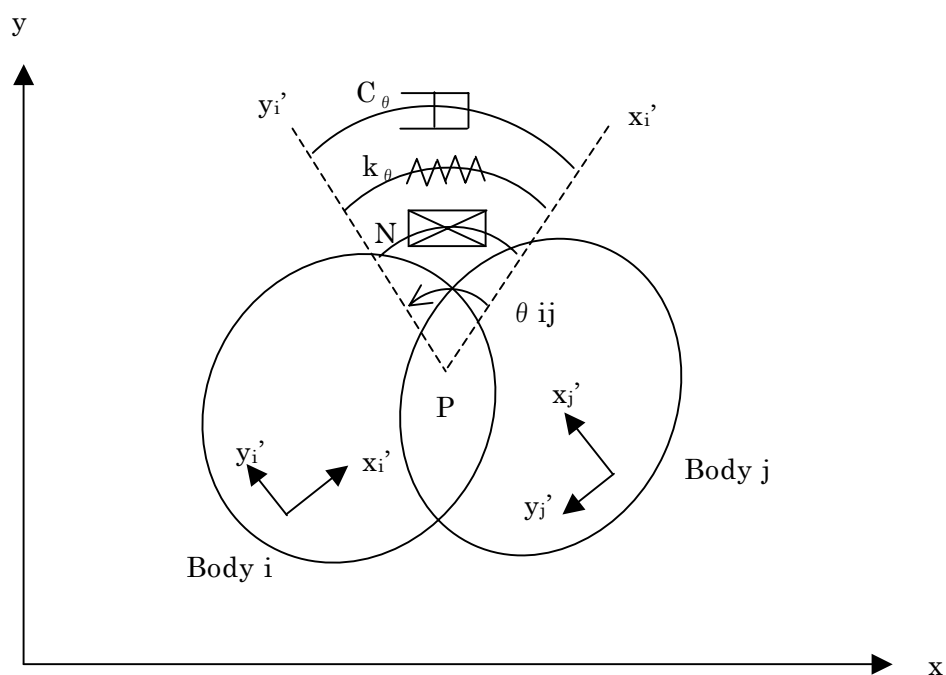


図 5-19 回転ばね・ダンパ・アクチュエータ

4-4 拘束のある場合の運動方程式

4-1の式について、 r と ϕ の微小変化 δr と $\delta\phi$ に対する仮想仕事を考えると次式のように表される。

$$\delta r^T [m\ddot{r} - F] + \delta\phi [J'\ddot{\phi} - n] = 0$$

これをまとめると、

$$\delta r^T [M\ddot{q} - Q] = 0$$

となる。ここで、

$$q = [x \quad y \quad \phi]^T \quad M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J' \end{bmatrix} \quad Q = [F^T \quad n]^T$$

である。次に nb 個の body について、上式の和を考えると次のようになる。

$$\sum_{i=1}^{nb} \delta q_i^T [M\ddot{q}_i - Q_i] = 0$$

Q_i 成分のうち拘束による成分 Q_i^c の仮想仕事の和は0となる。これより、

$$\sum_{i=1}^{nb} \delta q_i^T Q_i^c = 0$$

ここで

$$\begin{aligned} Q_i^A &= Q_i - Q_i^c \\ q &= [q_1^T \quad q_2^T \quad \cdots \quad q_{nb}^T]^T \\ M &= \text{diag}(M_1, M_2, \dots, M_{nb}) \\ Q &= [Q_1^T \quad Q_2^T \quad \cdots \quad Q_{nb}^T]^T \end{aligned}$$

である。

まとめると次式のようになる。

$$\delta q^T [M\ddot{q} - Q^A] = 0 \quad (3-1)$$

一方、機構の拘束条件から

$$\Phi_q \delta q = 0 \quad (3-2)$$

式(3-1)と式(3-2)から、ラグランジュの乗数ベクトル λ を用いて

$$[M\ddot{q} + \Phi_q^T \lambda - Q^A]^T \delta q = 0 \quad (3-3)$$

となる。

任意の δq について、上式が成り立つためには

$$M\ddot{q} + \Phi_q^T \lambda - Q^A = 0 \quad (3-4)$$

でなければならない。これが拘束を持った機構の運動方程式である。この式と加速度方程式を連立させた、次式を微分代数方程式と言う。

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^A \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

第 5 節 逆動力学

逆動力学とは、機構の運動が与えられたとき、関節にかかる力／トルクを求める問題をいう。

式 (3-4) から

$$\lambda = \Phi_q^{-1T} [Q^A - M\ddot{q}] \quad (3-5)$$

となる。したがって、body i に関する第 k 番の拘束について、次に示す仮想仕事を考える (図 5-20)。

$$\begin{aligned} -\delta q_i^T \Phi_{q_i}^{kT} \lambda^k &= -(\delta r_i^T \Phi_{r_i}^{kT} \lambda^k + \delta \phi_i \Phi_{\phi_i}^{kT} \lambda^k) \\ &= \delta r_i^{PT} F_i^{k} + \delta \phi_i T_i^{k} \end{aligned}$$

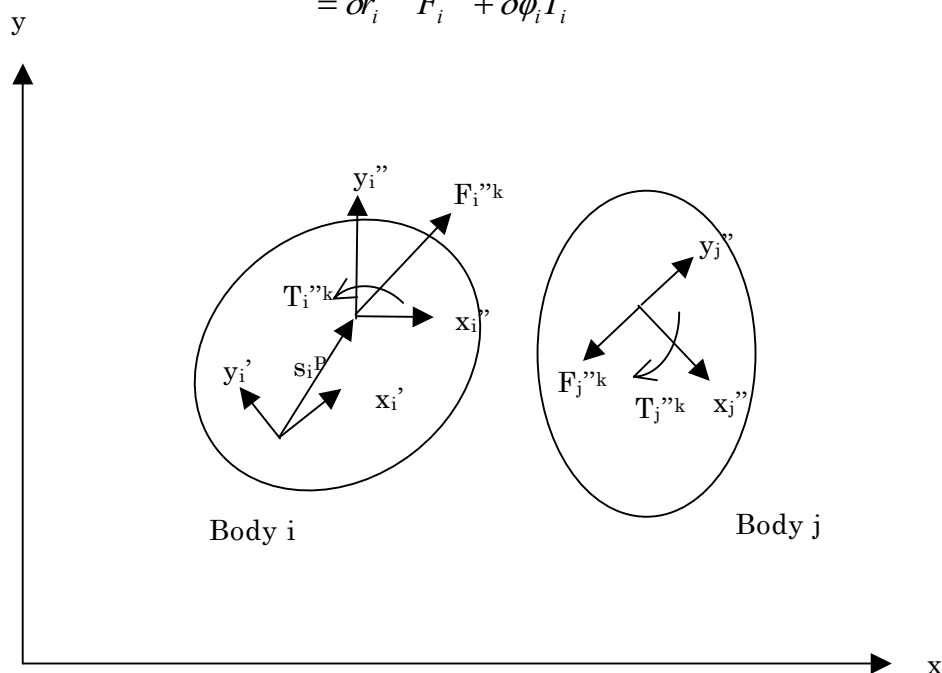


図 5-20 作用反作用力

δr_i と $\delta r_i''$ の関係は以下のようにして求められる。

$$\begin{aligned} r_i^P &= r_i + A_i s_i'^P \\ \delta r_i^P &= \delta r_i + B_i s_i'^P \delta \phi_i \end{aligned}$$

r_i^P の微小変化分 δr_i^P と $\delta r_i''^P$ の微小変化分 $\delta r_i''^P$ の関係は、第 k 関節が定義されている $x_i'' - y_i''$ 座標系から、重心が定義されている $x_i' - y_i'$ 座標系への変換マトリクス C_i と A_i を用いて

$$\delta r_i = A_i C_i \delta r_i''^P - B_i s_i'^P \delta \phi_i \quad (3-6)$$

式 (3-6) を式 (3-2) に代入すると関節の反力と反トルクは次のようになる。

$$\begin{aligned} F_i''^k &= -C_i^T A_i^T \Phi_{r_i}^{kT} \lambda^k \\ T_i''^k &= (s_i'^{PT} B_i^T \Phi_{r_i}^{kT} - \Phi_{\phi_i}^{kT}) \lambda^k \end{aligned}$$

第6節 数値計算法

機構解析では、組み立てた機構モデルを色々な数値計算法を用いて解く。ここでは、機構の運動学解析で用いる、ガウスの消去法、ニュートン・ラプソン法と動力学解析で用いるルンゲクッタ法について述べる。

6-1 ガウスの消去法

運動学解析で導いた速度と加速度の式は行列方程式であり、数値的に解かなければならない。n 個の未知数を持ち係数が実数である n 個の線形代数方程式について考える。

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

上式を行列表示にすると、つぎのようになる。

$$Ax = b \quad (3-7)$$

ここで、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$$

$$b = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]^T$$

式 (3-7) を解く方法がガウスの消去法である。この方法は一度に 1 つの変数を消去する方法で、前向き消去と後ろ向き代入の 2 つの主要なステップで構成されている。

(1) 前向き消去

まず、最初の方程式を a_{11} で割り x_1 の係数を 1 にする (いま $a_{11} \neq 0$ と仮定する)。次に、修正した最初の式に $-a_{j1}$ を掛け、その結果の式を j 番目の式に加えることにより j 番目の式から変数 x_1 を消去する。 $j=2, \dots, n$ に、この操作を行うと、次の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

さらに、 $a_{22}^{(1)} \neq 0$ と仮定して、式 (3-8) の第 2 番目の式を $a_{22}^{(1)}$ で割り、 x_2 の係数を 1 にする。次に、この式を $-a_{j2}$ 倍し、 j 番目 $j=3, \dots, n$ の式に加えることによって j 番目の式から x_2 を消去すると次の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

このアルゴリズムの $(n-1)$ ステップ後、いま $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$ と仮定して、 $a_{nn}^{(n-1)}$ で n 番目の行を割ると、前向き消去の最終結果が得られる。

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

この得られた行列は、対角線より下の要素がすべて0である。

(2) 後ろ向き代入

後ろ向き代入は後ろ向き代入式(3-9)を使用した(n-1)個の基本的な解法ステップで構成されている。式(3-9)のn番目から $x_n = b_n^{(n)}$ である。 x_n のこの値を(n-1)番目の式に代入する。(n-1)番目の式から x_{n-1} の値が求められる。一つ前の式に対してこの方法を繰り返し用いると、残りの変数を順次求めることができる。

[例題]

次の行列方程式の解を求めなさい。

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(解答)

前向き消去を行うと、次のようになる。

第1行目を3で割り x_1 の係数を1にする。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

上式の第1行目の式と第2行目の式に加える。次に、第1行目の式に-2をかけ、その結果を第3行目の式に加える。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 7/3 & 2/3 \\ 0 & -11/3 & 5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 20/3 \\ -7/3 \end{bmatrix}$$

上式の第2行目の式を $7/3$ で割り x_2 の係数を1にする。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & -11/3 & 5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 20/7 \\ -7/3 \end{bmatrix}$$

上式の第 2 行目の式を $11/3$ 倍し第 3 行目の式に加える。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 19/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 20/7 \\ 57/7 \end{bmatrix}$$

上式の第 3 行目の式を $19/7$ で割り x_3 の係数を 1 にする。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 20/7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

後ろ向き代入を行うと次のようになる。

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 \\ x_2 + \frac{2}{7} \times 3 &= \frac{20}{7} \quad \text{より} \quad x_2 = \frac{14}{7} = 2 \\ x_1 + \frac{1}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 3 &= \frac{2}{3} \quad \text{より} \quad x_1 = 1 \end{aligned}$$

6-2 ニュートン・ラプソン法

運動学解析の位置の式は一般に非線形であるが、線形方程式を繰り返し解くことにより、この非線形方程式を解くことができる。

スカラ変数 q からなる次のような非線形方程式について考える。

$$\Phi(q) = 0 \quad (3-10)$$

$q = q^*$ を式 (3-10) の解とし、 $q^{(i)}$ を q^* の近似値とする。 $\Phi(q)$ を点 $q = q^{(i)}$ まわりでテイラー級数に展開すると

$$\Phi(q) = \Phi(q^{(i)}) + \Phi_q(q^{(i)})(q - q^{(i)}) + \text{高次成分の項} \quad (3-11)$$

となる。もし $q^{(i+1)} - q^{(i)}$ が小さいならば高次の項を無視できたため、 $q = q^{(i+1)}$ を修正した近似値であるとする。それは次のようになる。

$$\Phi(q^{(i+1)}) \approx \Phi(q^{(i)}) + \Phi_q(q^{(i)})(q^{(i+1)} - q^{(i)}) = 0 \quad (3-12)$$

すなわち $q = q^{(i+1)}$ が改良された近似値である。もし $\Phi_q(q^{(i)}) \neq 0$ ならば式 (3-12) を解いて、次式が得られる。

$$q^{(i+1)} = q^{(i)} - \frac{\Phi(q^{(i)})}{\Phi_q(q^{(i)})} \quad (3-13)$$

式 (3-13) は式 (3-10) の解の初期値から始まり、次々に近似解を求めるのに利用する。

ニュートン・ラプソン法は次に示す、計算手順で行う。

- ① 式 (3-10) の解の初期値 $q^{(0)}$ を推定する。
- ② 逐次 $\Phi(q^{(i)})$ と $\Phi_q(q^{(i)})$ を計算する ($i=0,1,\dots$)。式の許容誤差を ε_e とし、 ε_s を解の

許容誤差とすると、 $|\Phi_q(q^{(i)})| < \varepsilon_e$ かつ $|q^{(i)} - q^{(i-1)}| < \varepsilon_s$ ならば、計算を打ち切る。そ

うでなければ次のステップ3に進む。

- ③ 式 (3-13) から $q^{(i+1)}$ を計算し、 i の代わりに $i+1$ としてステップ2に戻る。

[例題]

次に示す2次式の解を求めなさい。ただし許容誤差 $\varepsilon_s = \varepsilon_e = 0.02$ とする。

$$\Phi(q) = (q-1)^2 - 3$$

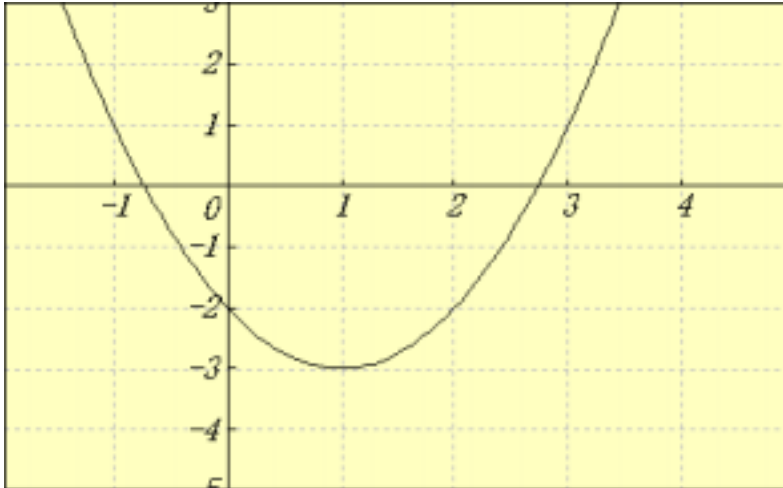


図 5-21 $\Phi(q) = (q-1)^2 - 3$ のグラフ

(解答)

初期値を $q^{(0)} = 3$ とする。

$\Phi_q(q-1) = 2(q-1)$ である。

$$\Phi(q^{(0)}) = (3-1)^2 - 3 = 1$$

$$\Phi_q(q^{(0)}) = 2 \times (3-1) = 4$$

であるので、式 (3-13) より、

$$q^{(1)} = q^{(0)} - \frac{\Phi(q^{(0)})}{\Phi_q(q^{(0)})} = 3 - \frac{1}{4} = 2.75$$

$$|q^{(1)} - q^{(0)}| = |2.75 - 3| = 0.25 > \varepsilon_s$$

であるので、 $q^{(2)}$ を求める。

$$\Phi(q^{(1)}) = (2.75-1)^2 - 3 = 0.0625 > \varepsilon_e$$

$$\Phi_q(q^{(1)}) = 2 \times (2.75-1) = 3.5$$

$$q^{(2)} = q^{(1)} - \frac{\Phi(q^{(1)})}{\Phi_q(q^{(1)})} = 2.75 - \frac{0.0625}{3.5} = 2.732$$

$$|q^{(2)} - q^{(1)}| = |2.732 - 2.75| = 0.018 < \varepsilon_s$$

$$\Phi(q^{(2)}) = (2.732-1)^2 - 3 = -0.000176 < \varepsilon_e$$

であるので、この方程式の解は $q = 2.732$ となる。

6-3 ルンゲ・クッタ法

動力学解析で用いる、微分方程式を数値的に解く解法について述べる。

次に示す1階の常微分方程式

$$\frac{du}{dt} = f(u, t) \quad (3-14)$$

について考える。この微分方程式の解は、次式に示す積分した形に直し、その右辺第2項をなるべく精度よく近似し、 $k=0,1,2,\dots$ の順に計算を進めて解を求める。

$$u(t_{k+1}) = u(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(u, t) dt \quad (3-15)$$

ルンゲ・クッタ法は上式の右辺第2項を

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(u, t) dt = \frac{\Delta u_1 + 2\Delta u_2 + 2\Delta u_3 + \Delta u_4}{6} \quad (3-16)$$

と置いて解を求める方法であり、台形公式、中点公式やシンプソン法に比べて精度良く解を求めることができる。

式(3-16)において

$$\Delta u_1 = f(u(t_k), t_k) \Delta t$$

$$u_1 = u(t_k) + \frac{\Delta u_1}{2}$$

$$\Delta u_2 = f(u_1, t_k + \frac{\Delta t}{2}) \Delta t$$

$$u_2 = u(t_k) + \frac{\Delta u_2}{2}$$

$$\Delta u_3 = f(u_2, t_k + \frac{\Delta t}{2}) \Delta t$$

$$u_3 = u(t_k) + \Delta u_3$$

$$\Delta u_4 = f(u_3, t_k + \Delta t) \Delta t$$

とする。

[例題]

次の微分方程式の計算をなさい。

$$\frac{du}{dt} = u$$

ただし、この式の厳密解は e^t である。初期値を $u(0)$ 、刻み幅を Δt とする。

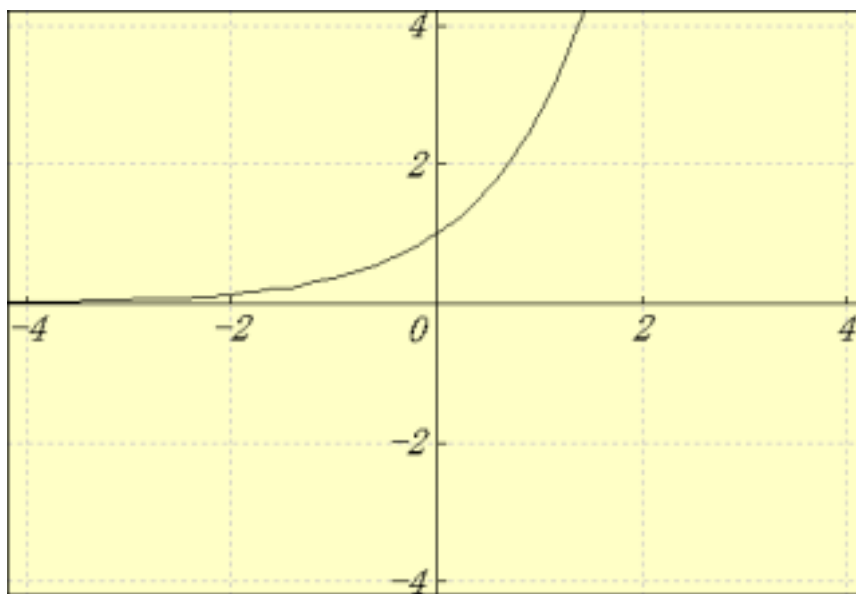


図 5 - 2 2 $u = e^t$ のグラフ

(解答)

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= u(0) \times \Delta t \\ u_1 &= u(0) + \frac{\Delta u_1}{2} = u(0) + \frac{u(0)}{2} \Delta t \\ \Delta u_2 &= u_1 \Delta t = u(0) \left(\Delta t + \frac{1}{2} \Delta t^2 \right) \\ u_2 &= u(0) \left(1 + \frac{1}{2} \Delta t + \frac{1}{4} \Delta t^2 \right) \\ \Delta u_3 &= u_2 \Delta t = u(0) \left(\Delta t + \frac{1}{2} \Delta t^2 + \frac{1}{4} \Delta t^3 \right) \\ u_3 &= u(0) + \Delta u_3 \\ &= u(0) \left(1 + \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t^2 + \frac{1}{4} \Delta t^3 \right) \\ \Delta u_4 &= u_3 \Delta t \\ &= u(0) \left(\Delta t + \Delta t^2 + \frac{1}{2} \Delta t^3 + \frac{1}{4} \Delta t^4 \right) \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} u(1) &= u(0) + \frac{\Delta u_1 + 2\Delta u_2 + 2\Delta u_3 + \Delta u_4}{6} \\ &= u(0) \left(1 + \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t^2 + \frac{1}{6} \Delta t^3 + \frac{1}{24} \Delta t^4 \right) \\ &= u(0) \left(1 + \frac{1}{1!} \Delta t + \frac{1}{2!} \Delta t^2 + \frac{1}{3!} \Delta t^3 + \frac{1}{4!} \Delta t^4 \right) \end{aligned}$$

となる。これは e^t のマクローリン級数の第 4 次近似式を表しているため、これは厳密解と一致する。

第7節 機構の解析モデル

この節では、2つの例題をもとに機構のモデル化および自由度の計算方法について述べる。

7-1 早戻り機構

ここでは、形削り盤に使用されている早戻り機構（クイックリターンメカニズム）を扱う。この機構は図5-23に示すように、クランク（部品3）が反時計方向に回転すると、工具（部品6）が工作物上を左へ移動し切削が行われる。そして、工具が右に移動するときが早戻り工程である。

下図3-23において、AからEは関節、□から□はbodyを表している。

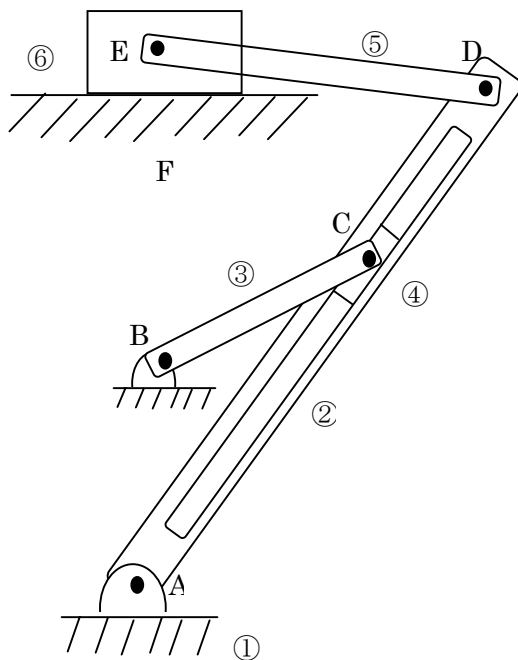


図5-23 早戻り機構

この早戻り機構の構成部品、拘束条件、自由度等を下記に示す。

構成部品数

6body

一般化座標の総数

$$nc=18$$

拘束条件

回転関節

A 2

B 2

C 2

D 2

E 2

並進関節

C 2

F 2

ベースの拘束条件(body1)

3

$$nh=17$$

拘束の総数

機構の自由度

$$DOF=18-17=1$$

この早戻り機構の場合、機構の自由度は1であるので、body3に回転駆動を付加する。

7-2 歯車・スライダ機構

下図 5-24 は歯車列が形削り盤の可変行程スライダを駆動する複合機構である。3つの車を組み合わせることにより、body5 がスライダ (body6) の行程を制御するように回転しているときでも、第一の歯車 (body2) の入力回転が第三の歯車 (body4) に伝達できる。下図 5-24 において、A から E は関節、①から⑥は body を表している。

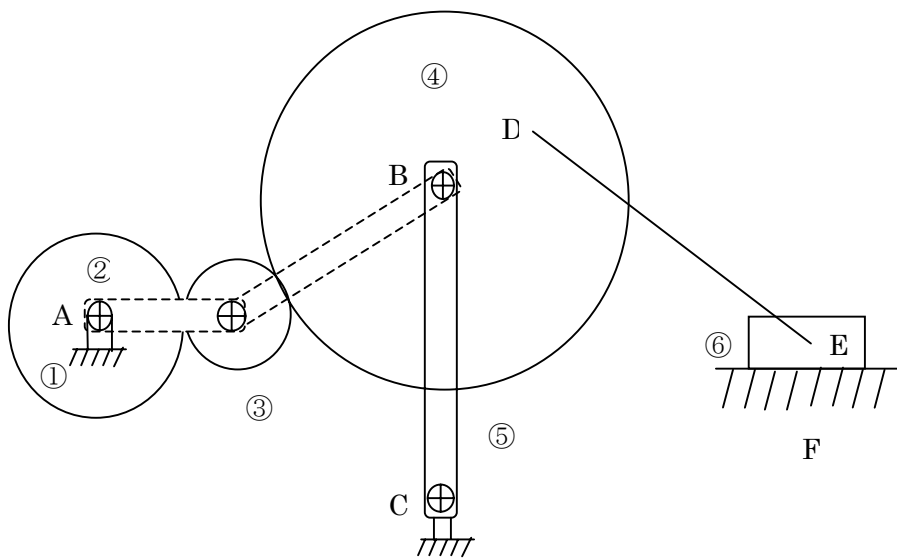


図 5-24 歯車・スライダ機構

この歯車・スライダ機構の構成部品、拘束条件、自由度等を下記に示す。

構成部品数	一般化座標の総数	
6body	<hr/>	
	nc=18	
拘束条件		
回転関節	A	2
	B	2
	C	2
歯車列の伝達列	歯車 2・歯車 3	1
	歯車 3・歯車 4	1
距離拘束	歯車 2・歯車 3	1
	歯車 3・歯車 4	1
	歯車 4・スライダ	1
並進関節	F	2
ベースの拘束	A	3
機構の自由度		2
	<hr/>	
	nh=16	
	拘束の総数	
	DOF=18-16=2	

この機構の場合、機構の自由度は 2 であるので、body2 の歯車と body5 の行程制御リンクに駆動拘束条件を付加する。

参考文献

1. .J.ハウグ著 松井 邦人、樫村 幸辰、井浦 雅司 翻訳：コンピュータを利用した機構解析の基本、大河出版 (1996)
2. 遠山 茂樹 著：機械のダイナミクス、コロナ社 (1993)
3. カルキング ver6.0 ユーザーズガイド、(株) シンプレックス (2003)
4. 戸川 隼人 著：数値計算法、コロナ社 (1995)