

第2節 1自由度系

機械工学においては、多くの動的な系が1自由度系を持つ系として近似することができる。この簡素化された系で、振動の基本的な特性が説明でき、その特性はモード解析を用いることによって、多自由度系に大きな変更なしに拡張できる。したがってモード解析を修得するためには、1自由度系の振動をしっかりと理解する必要がある。

物には、そのままの性質があり、例えば動いている物を止めようとするとき動いていたいという抵抗力がはたらく。この抵抗力には、慣性力（加速度×質量）、復元力（変位×ばね定数）、粘性抵抗力（速度×粘性抵抗係数）の3つの力がある。慣性力を f_m 、復元力を f_k 、粘性抵抗力を f_c とすると、それらは次のような時間 t の関数になる。

$$f_m(t) = -m\ddot{x}(t), \quad f_k(t) = -kx(t), \quad f_c(t) = -c\dot{x}(t) \quad (1-2-1)$$

外部から何の作用もしない自由な状態にある図1-1-5の1自由度系の力のつりあい式は次のようになる。

$$f_m(t) + f_k(t) + f_c(t) = 0 \quad (1-2-2)$$

これを次のように書くこともできる。

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + c\dot{x}(t) = 0 \quad (1-2-3)$$

式(1-2-3)は、運動しているときの状態を表す方程式であるので、運動方程式という。

振動は、大きさと時間という2個の互いに異なる独立な素からなる2次元現象であるので、複素数（実部と虚部の2個の互いに異なる独立な素からなる2次元数）を用いれば、1個の数で表現できる。そのため複素数を振動を表現する場合に使用する。

1-2-1 不減衰系の自由振動

振動の基本は粘性を省略した系（不減衰系という）で説明できるため、式(1-2-3)で $c=0$ とすると、運動方程式は

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (1-2-4)$$

となる。この運動方程式は時間 t を独立変数とする2階の微分方程式である。式(1-2-4)を満足する解である変位は次のように仮定する。

$$x(t) = X_c \cos \omega t + X_s \sin \omega t \quad (1-2-5)$$

もしくは、複素数を使用すると、次のように表される。

$$x(t) = X_1 e^{j\omega t} + X_2 e^{-j\omega t} \quad (1-2-6)$$

ここで、 ω は角振動数、 X_c 、 X_s と X_1 、 X_2 は未定係数である。

時間 $t=0$ の変位と速度を初期条件として次のように与える。

$$x(t=0) = x_h, \quad \dot{x}(t=0) = v_h \quad (1-2-7)$$

変位である式(1-2-6)を時間 t で微分すると、速度と加速度は

$$\dot{x}(t) = j\omega X_1 e^{j\omega t} - j\omega X_2 e^{-j\omega t} = j\omega(X_1 e^{j\omega t} - X_2 e^{-j\omega t}) \quad (1-2-8)$$

$$\ddot{x}(t) = (j\omega)^2(X_1 e^{j\omega t} + X_2 e^{-j\omega t}) = -\omega^2(X_1 e^{j\omega t} + X_2 e^{-j\omega t}) = -\omega^2 x(t) \quad (1-2-9)$$

となる。

式(1-2-6)と式(1-2-9)を式(1-2-4)に代入すると

$$(-\omega^2 m + k)x(t) = 0 \quad (1-2-10)$$

となる。上式が任意の時刻 t で成り立つためには

$$-\omega^2 m + k = 0 \quad (1-2-11)$$

である。式(1-2-11)より

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1-2-12)$$

となる。式(1-2-12)は、自由状態のもとでは、必ずこの角振動数で振動し、それ以外の振動は生じないことを表している。この ω を不減衰固有角振動数という。 ω を 2π で割った次式を不減衰固有振動数という。

$$f_n = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1-2-13)$$

式(1-2-4)の運動方程式の解を求める方法について述べる。まず式(1-2-7)の初期条件を用いて、式(1-2-5)と式(1-2-6)の未定係数を求める。式(1-2-6)と式(1-2-9)で $t=0$ とおき、式(1-2-7)を用いると

$$x_h = X_1 + X_2, \quad v_h = j\omega(X_1 - X_2) \quad (1-2-14)$$

となるため、式(1-2-14)を書き換えると未定係数 X_1 と X_2 は次のようになる。

$$X_1 = \frac{1}{2}(x_h - j\frac{v_h}{\omega}), \quad X_2 = \frac{1}{2}(x_h + j\frac{v_h}{\omega}) \quad (1-2-15)$$

次に式(1-2-5)を用いて微分方程式を解く。式(1-2-5)を時間 t で微分して求めた速度、速度を時間 t で微分して求めた加速度を式(1-2-7)の初期条件を用いると、未定係数 X_c と X_s は次のようになる。

$$X_c = x_h, \quad X_s = \frac{v_h}{\omega} \quad (1-2-16)$$

式(1-2-16)を式(1-2-5)に代入すると

$$x(t) = x_h \cos\omega t + \frac{v_h}{\omega} \sin\omega t \quad (1-2-17)$$

となる。ここで、次のような関係を満足する x_0 と ϕ を新しく導入する。

$$\left. \begin{aligned} x_0 \cos\phi &= x_h, & x_0 \sin\phi &= -\frac{v_h}{\omega} \\ \tan\phi &= \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = -\frac{v_h}{x_h \omega} \end{aligned} \right\} \quad (1-2-18)$$

式(1-2-18)を式(1-2-17)に代入すると

$$x(t) = x_0(\cos \phi \cos \omega t - \sin \phi \sin \omega t) = x_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (1-2-19)$$

となる。

1-2-2 減衰系の自由振動

粘性減衰が存在するときの自由振動を調べる。その場合の運動方程式は以下のようになる。

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (1-2-20)$$

式(1-2-20)の解を次のように仮定する。

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} \quad (1-2-21)$$

式(1-2-21)を時間 t で1度と2度微分すると

$$\dot{x}(t) = \lambda x_0 e^{\lambda t}, \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 x_0 e^{\lambda t} \quad (1-2-22)$$

となる。式(1-2-21)と式(1-2-22)を式(1-2-20)に代入すると

$$x_0(m\lambda^2 + c\lambda + k)e^{\lambda t} = 0 \quad (1-2-23)$$

となる。この式が任意の時刻 t で成り立つためには

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (1-2-24)$$

である。式(1-2-24)より

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \left(-\frac{c}{2\sqrt{mk}} \right) \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{c^2}{4mk} - 1} \quad (1-2-25)$$

となる。ここで、下記に示す新たな変数 c_c と ζ を導入する。

$$\left. \begin{aligned} c_c &= 2\sqrt{mk} = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega \\ \zeta &= \frac{c}{c_c} \end{aligned} \right\} \quad (1-2-26)$$

式(1-2-26)を用いると、式(1-2-25)は次のようになる。

$$\lambda = -\omega \frac{c}{c_c} \pm \omega \sqrt{\left(\frac{c}{c_c}\right)^2 - 1} = -\omega \zeta \pm \omega \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (1-2-27)$$

式(1-2-27)を用いて、式(1-2-21)を書き換えるにあたり、 λ が2通りあるので、一般的な解の形は両方に定数を乗じて加え合わせた次式になる。

$$x(t) = X_1 e^{\lambda_1 t} + X_2 e^{\lambda_2 t} \quad (1-2-28)$$

ここで X_1 と X_2 は未定係数で、初期条件を与えて決める。

(1) $\zeta \geq 1$ の場合

$\zeta \geq 1$ の場合、 $\zeta > \sqrt{\zeta^2 - 1}$ であるので、式(1-2-27)から $\lambda < 0$ である。式(1-2-28)は負の実数を指数とする指数関数になり、 $t=0$ で $x=X_1+X_2$ 、 $t \rightarrow \infty$ で $x=0$ であるので、図1-2-1のように、時間と共に大きさが減少しゼロに漸近していく無周期運動になる。

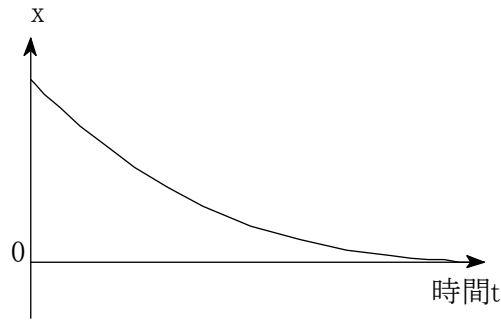


図1-2-1 無周期運動

(2) $\zeta < 1$ の場合

$\zeta < 1$ の場合の λ_1 と λ_2 は、共に実部が負である次式に示す複素数になる。

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\omega\zeta \pm j\omega\sqrt{1-\zeta^2} \quad (1-2-29)$$

ここで、減衰率 σ と減衰固有角振動数 ω_d を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \omega\zeta \\ \omega_d &= \omega\sqrt{1-\zeta^2} \end{aligned} \right\} \quad (1-2-30)$$

式(1-2-30)を式(1-2-29)に代入すると

$$x(t) = X_1 e^{(-\sigma + j\omega_d)t} + X_2 e^{(-\sigma - j\omega_d)t} = e^{-\sigma t} (X_1 e^{j\omega_d t} + X_2 e^{-j\omega_d t}) \quad (1-2-31)$$

となる。これは、 ω_d の角振動数で振動し、振幅が単調にゼロへと減少する、すなわち減衰する振動現象を表している。

式' (1-2-31)を三角関数に変換すると

$$x(t) = e^{-\sigma t} \{ (X_1 + X_2) \cos \omega_d t + j(X_1 - X_2) \sin \omega_d t \} \quad (1-2-32)$$

となる。ここで、

$$X_1 + X_2 = X_c, \quad j(X_1 - X_2) = -X_s \quad (1-2-33)$$

を導入して、式(1-2-32)を書き換えると次のようになる。

$$x(t) = e^{-\sigma t} (X_c \cos \omega_d t - X_s \sin \omega_d t) \quad (1-2-34)$$

さらに、次のような関係を満たす x_0 と ϕ を導入する。

$$\left. \begin{aligned} x_0 \cos \varphi &= X_c, & x_0 \sin \varphi &= X_s \\ \tan \varphi &= \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{X_s}{X_c} \end{aligned} \right\} \quad (1-2-35)$$

式(1-2-35)を式(1-2-34)に代入すると

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t} (\cos \omega_d t \cos \varphi - \sin \omega_d t \sin \varphi) = x_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi) \quad (1-2-36)$$

となる。式(1-2-36)において位相 $\varphi = 0$ の場合を図 1-2-2 に示す。

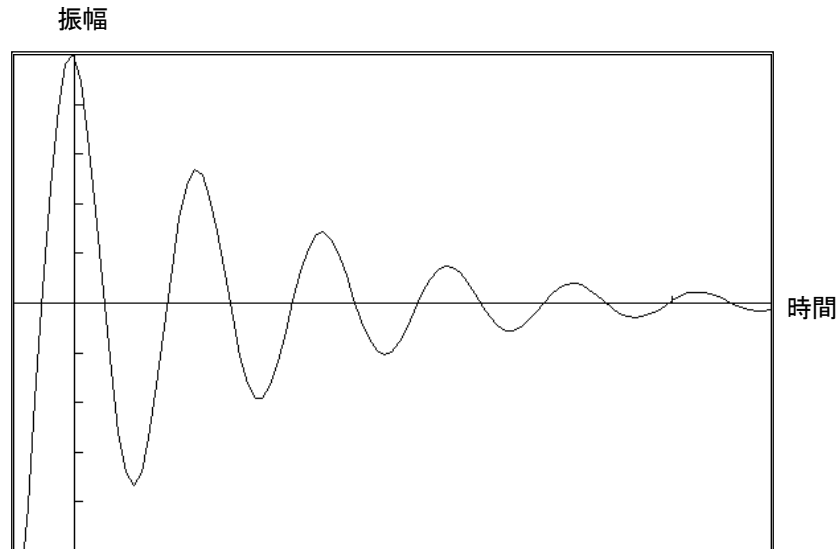


図 1-2-2 減衰振動

(3) 減衰の働き

$\zeta < 1$ の場合には系は振動し、 $\zeta \geq 1$ の場合には系は振動しない。式(1-2-26)より $\zeta = c/c_c$ であるため、粘性減衰係数 c がある値 c_c よりも小さければ系は振動し、大きければ振動しない。この c_c を臨界減衰係数という。

図 1-1-4 で示した 1 自由度力学モデルにおいて、ばねは振動を発生させ盛んに作用をし、粘性減衰は振動を抑え止める作用をすることがわかる。 $\zeta \geq 1$ すなわち $c \geq c_c$ の場合には、粘性減衰がばねより優勢であり、振動を生じない。この状態を過減衰という。 $\zeta < 1$ すなわち $c < c_c$ の場合には、ばねが粘性減衰より優勢であり、振動を生じる。この状態を不足減衰という。

1-2-3 不減衰系の強制振動

図 1-2-3 の 1 自由度不減衰系に外から加振力を作用させると、力のつりあい式は以下のように表される。

$$m\ddot{x} + kx = f(t) \quad (1-2-37)$$

加振力として次のような調和加振力を作用させる。

$$f(t) = Fe^{j\Omega t} \quad (1-2-38)$$

ここで、 F は振幅、 Ω は角振動数である。

式(1-2-38)を式(1-2-37)に代入すると

$$m\ddot{x} + kx = Fe^{j\Omega t} \quad (1-2-39)$$

となる。この運動方程式の解を、次式のように仮定する。

$$x(t) = Xe^{j\Omega t} \quad (1-2-40)$$

式(1-2-40)は微分方程式である式(1-2-37)の特有の外力に応じて決まる解であり、特解という。式(1-2-37)の外力の有無に左右されない一般解は式(1-2-36)である。一般解は自由振動となる。この系は、外力に応答する形で振動しながら、同時に外力の作用開始時に流入した初期エネルギーによって自由振動する。

式(1-2-40)の応答について考える。式(1-2-40)とその2度微分を式(1-2-37)に代入し、 X_{st} と β という量を導入すると、

$$\frac{X}{X_{st}} = \frac{1}{1-\beta^2} \quad (1-2-41)$$

となる。ここで、

$$X_{st} = \frac{F}{k}, \quad \beta = \frac{\Omega}{\omega} \quad (1-2-42)$$

である。複素振幅 X を大きさ $|X|$ と位相 φ で表すと

$$X = |X|e^{j\varphi} \quad (1-2-43)$$

である。式(1-2-43)を式(1-2-40)に代入すると

$$x(t) = |X|e^{j\varphi}e^{j\Omega t} = |X|e^{j(\Omega t + \varphi)} \quad (1-2-44)$$

となる。これより、 X が正の実数ならば $\varphi = 0^\circ$ であり、加振力に遅れずに応答する。 X が負の実数ならば $\varphi = -180^\circ$ であり、応答は 180° 遅れることがわかる。

強制振動において振幅が極大になる現象を共振といい、その山を共振峰、山の頂点を共振点という。1自由度系では共振は1個しかなく、不減衰系では共振の振幅は無限大になる。

加振の開始と共に、強制振動と自由振動が同時に発生する。この両者の振動数が異なるときには、両振動は別物として無関係に推移する。しかし、両者の振動数が同じになると、系は両方の振動の区別がつかなくなり、系は、強制振動に対しても抵抗を示さなくなり、加振源が系に注入するエネルギーをすべて受け入れるようになる。そこで系は、自由振動に調子を合わせて周期的に注入される強制振動のエネルギーを吸収し続けて自由振動に変えるので、自由振動のエネルギーは増え続ける。そうすると、エネルギーの増加は振幅の増大として現象に現れ、振幅が時間に比例して増大し続ける。

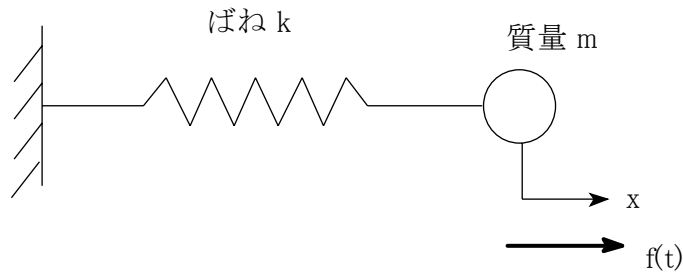


図1-2-3 1自由度不減衰系

1-2-4 減衰系の強制振動

図 1-2-4 の 1 自由度減衰系に外から加振力を作用させると、力のつりあい式は以下のように表される。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (1-2-45)$$

加振力として式(1-2-38)と同様な調和加振力を作用させると、式(1-2-45)は次のようになる。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Fe^{j\Omega t} \quad (1-2-46)$$

式(1-2-46)の運動方程式の一般解は式(1-2-36)のようになり、減衰自由振動である。特解を式(1-2-40)のように仮定し、式(1-2-40)を時間で 1 回微分もの t と 2 回微分したものを式(1-2-46)に代入すると、

$$\left(-\Omega^2 \frac{m}{k} + j\Omega \frac{c}{k} + 1\right)X = \frac{F}{k} \quad (1-2-47)$$

となる。

式(1-2-30)と式(1-2-26)から

$$\frac{m}{k} = \frac{1}{\omega^2}, \quad \frac{c}{k} = 2\zeta \frac{1}{\omega} \quad (1-2-48)$$

である。式(1-2-48)を式(1-2-47)に代入した後、式(1-2-41)を用いて変形すると

$$\frac{X}{X_{st}} = \frac{1}{1 - \beta^2 + 2j\zeta\beta} \quad (1-2-49)$$

となる。ここで、

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega} \quad (1-2-50)$$

である。式(1-2-49)を複素指数関数を用いて表すと次のようになる。

$$\frac{|X|}{X_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}, \quad \tan\varphi = -\frac{2\zeta\beta}{1 - \beta^2} \quad (1-2-51)$$

式(1-2-51)から変位振幅は、角振動数 Ω が非常に小さいときには、静変位に等しい。

Ω が増大し次第に加振速度が速くなると、振幅は増大し、 Ω が ω より少し小さいところで最大になった後に急減し、 Ω が ω よりはるかに大きくなるとゼロに近づいていくことが分る。さらに、位相 ϕ は、 Ω が極めて小さいときはゼロであり、変位応答が加振力に遅れることなく生じる。 Ω が増加するにしたがって、 ϕ は次第に大きい負の値をとり、応答は遅れてくる。 $\Omega < \omega$ の場合は応答の遅れの度合いは、減衰比 ζ が大きいほど大きくなる。 $\Omega = \omega$ の場合は ζ には関係なく、 $\phi = -90^\circ$ になる。 $\Omega > \omega$ の場合は、応答の遅れは -180° に近づく。 ζ が小さいほど応答が遅れる度合いが大きくなることが分る。

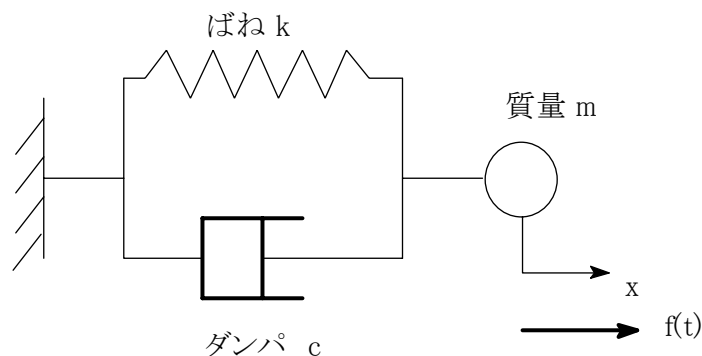


図1-2-4 1自由度粘性減衰系

1-2-5 振動伝達

回転機械やエンジンを基礎に据え付けるとき、それらの機械が発生する振動が基礎に伝わり周囲の構造物に悪影響を及ぼすことがある。あるいは、これとは逆に精密機械や測定器類は、基礎の振動が伝達されて精度が劣化することがある。ここでは、どのように振動が伝達されていくのか考える。

(1) 基礎への伝達力

振動する機械から基礎に振動が伝わらないように、ゴム、タイヤ、ばねなどで物体を支持することがよく行われる。このような支持部を含んだ振動系を、図 1-2-4 に示す 1 自由度粘性減衰系でモデル化し、機械と基礎の間でどのように振動が伝達されるのか考える。

系に作用する外力を式(1-2-38)の調和加振力とすると、その運動方程式(式 1-2-46))の定常応答の変位と速度は

$$x = X e^{j\Omega t}, \quad \dot{x} = j\Omega X e^{j\Omega t} = \Omega X e^{j(\Omega t + \pi/2)} \quad (1-2-52)$$

となる。変位と速度には 90° の位相差があることが分かる。ばねによる力の振幅は $k|X|$ であり、ダンパによる力の振幅は $c\Omega|X|$ であるので、両者は複素平面上で 90° の角度を

なしていることが分る。

従って、基礎に伝わる力の振幅 F_t は

$$F_t = |X| \sqrt{k^2 + c^2 \Omega^2} \quad (1-2-53)$$

と表される。この F_t と加振力の振幅 F の比 λ は次のようになる。

$$\lambda = \frac{F_t}{F} = \frac{|X|}{X_{st}} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{k} \Omega\right)^2} = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\beta)^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad (1-2-54)$$

λ を振動伝達率という。 Ω が ω より小さい ω_λ のときに λ が最大になることが分る。機械振動が基礎に伝わりにくくするためには、 λ になるべく小さいほうがよい。加振角振動数 Ω は決まっているので、支持ばねと機械の質量からなる系の固有振動数 ω を少なくとも $\omega < \Omega/\sqrt{2}$ になるように、機械に大きい質量を付加したり、柔らかいばねで支持すればよい。

(2) 基礎加振による応答

図 1-2-5 に示すように、基礎が一定の振幅で振動することによって系を加振する変位加振による応答を求める。基礎の振動を次式のようにおく。

$$x_b = B e^{j\Omega t} \quad (1-2-55)$$

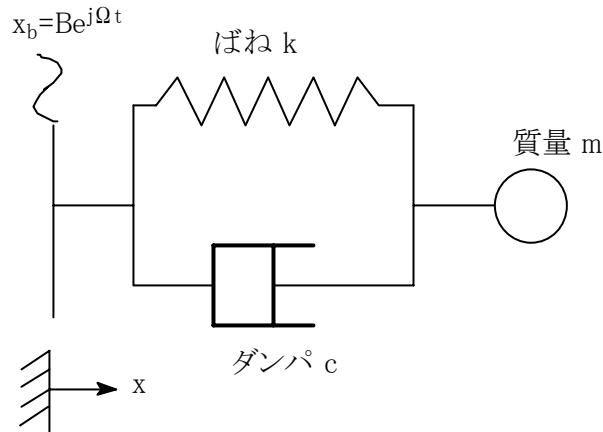


図1-2-5 基礎が振動する1自由度系

絶対空間内の質量の位置を x 、振動する基礎から見た質量の変位を y は

$$y = x - x_b \quad (1-2-56)$$

となる。

図 1-2-5 の運動方程式は次のようになる。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{x}_b + kx_b = B(k + jc\Omega)e^{j\Omega t} \quad (1-2-57)$$

式(1-2-57)を複素指数関数で表示すると

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_b e^{j(\Omega t + \eta)} \quad (1-2-58)$$

となる。ここで、

$$F_b = B\sqrt{k^2 + c^2\Omega^2}, \quad \tan \eta = \frac{c\Omega}{k} \quad (1-2-59)$$

である。式(1-2-58)の解は次のようになる。

$$x = X e^{j(\Omega t + \eta)} = |X| e^{j(\Omega t + \eta + \varphi)} \quad (1-2-60)$$

ここで

$$|X| = \frac{X_{st}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}, \quad \tan \varphi = -\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}, \quad X_{st} = \frac{F_b}{k} \quad (1-2-61)$$

とする。

基礎の振動がなるべく質量に伝わらないようにするためには、すくなくとも $\omega < \Omega/\sqrt{2}$ のようにする必要がある。 ω をできるだけ小さくするほど振動絶縁効果が大きくなる。

1-2-6 周波数応答関数

変位や速度など、状態を決定する量を状態量といい、入力と出力の比を伝達関数という。角振動数または振動数（周波数）を独立変数にとり、その関数として定義した伝達関数を周波数応答関数という。周波数応答関数には、変位と力の関係を示すコンプライアンス(G)、速度と力の関係を示すモビリティ($j\Omega G$)、加速度と力の関係を示すアクセラランス($-\Omega^2 G$)などがある。

周波数応答関数の式は以下のように表される。コンプライアンス G は

$$G(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{F} = \frac{1/k}{1-\beta^2 + 2j\zeta\beta} \quad \left(\beta = \frac{\Omega}{\omega} \right) \quad (1-2-62)$$

である。これを実部と虚部に分けて表現すると、

$$\left. \begin{aligned} G(\Omega) &= G_R(\Omega) + jG_I(\Omega) \\ G_R &= \frac{(1-\beta^2)/k}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \\ G_I &= \frac{-2\zeta\beta/k}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \end{aligned} \right\} \quad (1-2-63)$$

となる。また、振幅と位相に分けて複素指数関数の形で表現すると

$$\left. \begin{aligned} G(\Omega) &= |G| e^{j\varphi} \\ |G| &= \frac{1/k}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}, \quad \tan \varphi = -\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} \end{aligned} \right\} \quad (1-2-64)$$

となる。モビリティ H は

$$H(\Omega) = \frac{j\Omega X}{F} = \frac{j\Omega/k}{1-\beta^2 + 2j\zeta\beta} = \frac{j\omega\beta/k}{1-\beta^2 + 2j\zeta\beta} \quad (1-2-65)$$

である。これを実部と虚部に分けて表現すると、

$$\left. \begin{aligned} H(\Omega) &= H_R(\Omega) + jH_I(\Omega) = -\omega\beta G_I + j\omega\beta G_R \\ H_R &= -\omega\beta G_I, \quad H_I = \omega\beta G_R \end{aligned} \right\} \quad (1-2-66)$$

となる。また、振幅と位相に分けて複素指数関数の形で表現すると

$$\left. \begin{aligned} H(\Omega) &= |H|e^{j\varphi'} \\ |H| &= \omega\beta|G|, \quad \varphi' = \varphi + 90^\circ \end{aligned} \right\} \quad (1-2-67)$$

となる。アクセラランス $L(\Omega)$ は

$$L(\Omega) = \frac{-\Omega^2 X}{F} = \frac{-\omega^2\beta^2/k}{1-\beta^2 + 2j\zeta\beta} \quad (1-2-68)$$

である。これを実部と虚部に分けて表現すると、

$$\left. \begin{aligned} L(\Omega) &= L_R(\Omega) + jL_I(\Omega) \\ L_R &= -\omega^2\beta^2 G_R, \quad L_I = -\omega^2\beta^2 G_I \end{aligned} \right\} \quad (1-2-69)$$

となる。また、振幅と位相に分けて複素指数関数の形で表現すると

$$\left. \begin{aligned} L(\Omega) &= |L|e^{j\varphi''} \\ |L| &= \omega^2\beta^2|G|, \quad \varphi'' = \varphi + 180^\circ \end{aligned} \right\} \quad (1-2-70)$$

となる。

周波数応答関数を図示する方法として以下の 3 通りの方法がある。周波数（振動数）を共通の横軸とし、縦軸に振幅（大きさ）と位相をとった 2 個の図を縦に並べる方法であり、ボード線図という。

ボード線図は、周波数軸と振幅軸に対数目盛を用いる。周波数（振動数）を共通の横軸とし、縦軸に実部と虚部をとった 2 個の別々の図を縦に並べる方法であり、コクアド線図という。この方法は、共振点付近の位相変化がよくわかる、共振峰がボード線図より分かりやすく虚部に現れる。実部を横軸に、虚部を縦軸にとった複素平面上に、実部と虚部の関係を図示する方法であり、ナイキスト線図という。ナイキスト線図は、1 個の図ですむ反面、周波数が表に現れないので、曲線上に点を打って表示することが多い。