

## 報 文

耐疲労信頼性設計における疲労寿命  
分布モデルに関する一考察香川職業訓練短期大学校 石川 英 利・中 村 孝 司  
井 面 仁 志・洲 崎 正 幸  
山 口 力On The Modelling of Fatigue Life Distributions  
in The Reliability-Based Fatigue-Proof DesignHidetoshi Ishikawa, Takashi Nakamura, Hitoshi Inomo  
Masayuki Suzaki, Tsutomu Yamaguchi

**要 約** 機械・構造物は一般に上下限の複雑に変動したランダム荷重を受けており、それらの破壊はほとんどの場合が疲労に起因したものであることは周知の事実である。また材料の疲労強度や疲労寿命は、全く同一の負荷条件下においてすら画一的な値をとるものではなく、本来ばらつきを有した確率変数として取り扱う必要がある。従って、耐疲労信頼性設計においては、疲労強度や疲労寿命がどのような確率分布モデルに従うかを明らかにすることが不可欠の事柄となる。

こうした観点から、本研究においては、まず最初に、材料の疲労強度や疲労寿命のばらつきの原因と考えられる種々の不確定要因について考察し、確率・統計論的取り扱いの必要性について論じた。つぎに、代表的な疲労寿命分布モデルである偶発故障モデル、最弱リンクモデル、比例効果モデルおよび疲労き裂進展過程の確率モデルに関して、それらの導出の理論的背景および統計的性質について考察した。最後に、確率モデルの疲労寿命分布解析への具体的な適用事例として、ワイブル分布と対数正規分布について、設計に際して通常問題とされる小さな破壊確率の領域で両分布がどのように挙動するかを比較検討した。

本研究は、疲労破壊現象に伴う種々の不確定性を考慮したうえでの確率モデル化および信頼性解析のための統計的手法の習得を目的とするものであり、社会的にますますその重要性が認識されている信頼性解析・設計に関する実践教育に大きく寄与するものであると考えられる。

## I はじめに

材料の強度は外部から加えられる不規則な荷重に対する材料の抵抗力と考えることができる。そして、この材料強度は、通常同一の負荷条件下においてすら、大きなばらつきを示すものである。それゆえ、これらの不規則な外部荷重の繰り返しによって生じる疲労破壊現象は、材料強度に関連した工学的不確定性を明確に理解した上で、究明されなければならない<sup>(1),(2)</sup>。ところで、工学的不確定性 (engineering uncertainties) の意味については、一般的に、次のような種々のものを考えることができる<sup>(3)</sup>。

- (1) randomness—本質的にランダムな性質を有するもの。
- (2) fuzziness—対象があまりにも複雑で理解できないこと、

あるいは知識が不十分なため生じる不確定性。

- (3) ambiguity—自然言語に含まれるあいまいさ。
- (4) vagueness—画像の処理などに含まれるあいまいさ。
- (5) imprecision—情報の欠如による不正確さ。
- (6) generality—多くの意味あるいは解釈が存在することによるあいまいさ。

これらの不確定性のうち、最も本質的で重要なものは明らかに(1)の randomness である。そして、確率統計論は、まさにこの不確定性を対象とするものであり、本研究もまたこの不確定性に焦点をあてるものである。

ところで、破壊現象は本質的に、空間的および時間的に統計的な現象と考えられ、事実、各種材料の強度および疲労寿命に関するこれまでの実験データは同一条件の下でも表1 (ばらつきの尺度として変動係数を表示) のような

ばらつきを有したものであることが実験的に示されている<sup>(4)</sup>。

表1 各種材料の強度、破壊時間および疲労寿命のばらつき (変動係数 %)

(a) 鋼のぜい性破壊強度	~7.6
(b) 鋳鉄の破壊強度	8.8
(c) 軟鋼の上降伏点	20.0
(d) 軟鋼の極限引張り強さ	5.1
(e) ガラスの破壊強度	24.0
(f) 耐久限度	2.5~11.3
(g) ガラスの破壊時間	~100
(h) 鋼のクリープ破壊時間 (低温)	~70
(i) 鉄鋼の疲労寿命	30~95

また、このようなばらつきの原因として、

- (1) 構成原子の熱揺動。
- (2) 原子的欠陥ないし巨視的クラックの分布。
- (3) 構成材料の混合の不完全、異物の介在、冷却速度の相違、常温加工の相違、湿気含有量の差など比較的広範囲にわたる不均一性。
- (4) 試験片の形の変動。

等が考えられる<sup>(5)</sup>。

このことからわかるように、材料強度のばらつきに係わるものは、例えば金属材料について考えた場合には、原子の熱揺動、格子欠陥、転位などの原子、分子のオーダのものから、結晶粒径や結晶方位の分布、不純物の存在する場合の組織のあり方などであり、これらは材料の場所毎に異なり決して画一的なものではないと考えられる。すなわち、材料そのものの構造組織は、原子、分子のオーダのもの、結晶粒オーダのもの等いろいろな階層で不均質性、あるいは不連続性をもっている。したがって、破壊という現象を捕らえたとき、その現象がどの階層のものとして生起するものであるかということが問題となり、それが原子、分子のオーダの現象と考えられるならば、統計力学的なアプローチが必要となるであろう。しかしながら、この方面のアプローチによって現実の破壊現象を未だ具体的には説明し得てはいないように思われる。

材料は本来造り出された際すでに内部に上に述べたような不均質性をもつものであるが、さらに具体的なデータを与える材料試験について考えたときには、試験片の切り出しその他、また取り扱いについてもすべての試験片について全く同じと言うことは不可能であり、その差が何らかの影響を各試験片に及ぼしていると考えられる。

このように具体的な破壊、あるいは試験片にまで考え

を及ぼすならば、さらに多くの不均質性の重なった効果が現れるものと考えざるを得ない。したがっていずれかの階層に着目して、第一近似として確定論的なアプローチを試みることも不可能ではないけれども、その不均質性を考えるならば確率論的、統計的な取り扱いが本来的に要求されるように思われる。

上述の議論では、確率論的、統計的な取り扱いと一括して述べたけれども、確率論的アプローチとしては、破壊現象を、材料のいずれかの階層のものとして設定して、確率分布を考慮して取り扱うということも可能であろうが、一方、いずれの階層とも特定せずに、経験的に得られた経験則を理論的に導こうとする立場もあり得る。統計学は元来現象論的なものであって、内部構造というよりは、現象の間の関連を取り扱うという本質的な面をもっている。一方、理論というものについても、現象の本質的な面を捕らえるということまでを要求するのではなく、現象の予測可能性をもって足りるとする立場をとるならば、階層を特定せずに経験則を導こうという立場も容認し得るものである。この際には理論的と呼ぶよりは、むしろモデルと呼んだ方が適切なものであるかもしれない。したがって、予測誤差の小さいモデルを作り得るならば、当面、現実の問題に適用可能であろう。このような立場から、統計的なアプローチが種々の分野で適用されているのであると考えられる。

## II 疲労破壊現象の確率モデル化

前に述べたように、材料強度は外力に対する材料の抵抗力と考えられるから、これをデータとして捕らえ得るのは破壊に際してである。いま、材料に外部から与えられる力あるいは応力を  $S$ 、これに対する材料内部の抵抗力を  $R$  とするならば、

$$R \leq S \quad (1)$$

となったときに破壊が起こると考えてよい。これはストレス-強度モデル(stress-strength model)と呼ばれるものである。ここで、 $R$  または  $S$ 、あるいは双方が確率変数であると考えられるときは、式(1)の成立は確率事象として考えられることとなり、式(1)の成り立つ確率

$$P[R \leq S] \quad (2)$$

の値によって材料の強度が測られるということになる。このような場合には外部荷重および強度の確率分布の互いに重なり合った部分が不安定性や不信頼性を与える尺度となるであろう。

R、Sが確率変数である場合が一般であるが、この場合、外力Sについては観測を行って、その統計的特性を求めなければならない。また材料についての抵抗値Rは材料試験によって求められる。いずれの場合にも得られたデータについては統計的な処理が行われるのが通常であって、統計学的重要性はこの面でも大きいものがある。また、SあるいはRの確率分布を求める際には、例えば、確率論における中心極限定理を成り立たせるような条件が存在するときには、分布型は正規分布であると考えればよいというように、現実の条件が確率論におけるしかるべき理論的条件に対応すると考え得るとき、あるいは適当な変数変換によって、そのような理論的条件に対応するものが得られるときには、確率論そのものによって、分布型を定め得る場合もあり得る。また、現象を説明するための適切なモデルを削り、それによって経験的に得られた法則に適合するような分布型を導くことのできる場合もあり得る。この場合には、モデルの適否は、結果として得られた分布と、観測あるいは試験によって得られたデータとの対比によって判定されるのであり、このときにも統計的検定理論が重要な役割を果たすことになる。また確率論の定理そのものから得られたものであれ、モデルによって導かれたものであれ、そのパラメータは、やはり観測データを統計的に処理することによって得られるのである。

つきに、確率・統計論的アプローチに基づいて、いくつかの代表的な疲労寿命分布モデルについて考察する。

### 2. 1 偶発故障モデル

いまRは一定値であると仮定する。単位時間内におけるSの最大値の分布関数を $F_s(s)$ とするならば、単位時間内に破壊の起こらない確率は $P[S < R]$ であるから、確率分布関数が連続であるときには、

$$P[S < R] = P[S \leq R] = F_s(R) \quad (3)$$

となる。また、破壊の起こる確率は、

$$P[S \geq R] = 1 - F_s(R) = h \quad (4)$$

となる。

さて、使用時間をnとして、この期間中、上の分布関数、すなわち破壊確率が変わらないとすれば、使用時間中に破壊の起こらない確率は、

$$R_e(n) = (P[S < R])^n = \{F_s(R)\}^n (1 - h)^n \quad (5)$$

となる。ここで、nが十分大きいとすれば、

$$R_e(n) = (1 - h)^n = \left(1 - \frac{nh}{n}\right)^n \doteq \exp(-nh) \quad (6)$$

を得る。nは時間tで置き換えてもよいであろうから、結局、

$$R_e(t) \doteq \exp(-th) \quad (7)$$

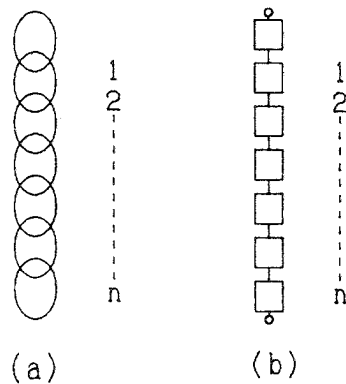
を得る。hは単位時間内に破壊あるいは故障の起こる確率であって、故障率と一般に呼ばれている。ここでは、Sの分布を考えながら、Sの分布の広い範囲の知識までは必要なく、故障率hを求め得れば十分である。さらに言えば、Rを一定としたが、Rもまた確率変数である場合にも、単位時間における故障率hさえ変化しないならば、このモデルは適用しうる。そして、 $R_e(t)$ は使用時間tに対する、この期間中破壊あるいは故障の起こらない確率であり、偶発故障における信頼度関数である。

## 2. 2 最弱リンクモデル

### 2. 2. 1 ワイブル分布の導出

単純な丸棒試験片の引張り試験を行った場合にも、破断する箇所は一定ではない。見かけは同じものであっても、丸棒には箇所により強弱があり、最も弱い部分が破断すると考えられる。このように、材料強度は最も弱い箇所の値によって定まると考え得ることから、材料強度の分布は最小値の分布として捕らえられ得るであろう。このような構造モデルは最弱リンクモデル (weakest link model) と呼ばれており、図1にその概念図を示す。

この図に示すように、同一母集団に属する強度分布をもった相互に独立なn個の環 (link) より構成される鎖 (chain) を考えれば、この鎖の強度は構成環中の最小強度をもつもので支配されるであろうということは容易に推察される。



鎖モデル

直列モデル

図1 最弱リンクモデルの概念図

さて、材料が  $n$  個の要素に分解できるものとし、各要素のもつ強度の分布を  $F(x)$  とする。このときの最小値の分布  $G_n(x)$  は、同じ分布関数  $F(x)$  をもつ  $n$  個のものの中の最小値の分布であるから、

$$G_n(x) = 1 - \{1 - F(x)\}^n \quad (8)$$

で与えられる。いま、強度の最小値  $\gamma$  が存在すると考えれば、 $F(x)$  は  $x \geq \gamma$  について定義され、次の条件、

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\gamma) = f'(\gamma) = \dots = f^{(\alpha-2)}(\gamma) = 0 \\ f^{(\alpha-1)}(\gamma) = F^{(\alpha)}(\gamma) = C \end{array} \right. \quad (9)$$

を満足するものと仮定する。ここに、 $F(x)$  は  $\alpha$  回微分可能とする。

ここで、 $x = \gamma$  の近傍において

$$|f^{(\alpha)}(\gamma)| = |F^{(\alpha)}(\gamma)|$$

は有界として、 $F(x)$  を Taylor 展開し、式(9)を用いれば、

$$F(x) = F(\gamma) + (x - \gamma)^2 \cdot F^{(\alpha)}(\gamma) / \alpha! + \dots \quad (10)$$

と書くことができる。また  $x = \gamma$  の近傍では近似的に、

$$\ln\{1 - F(x)\} \cong -F(x) \quad (11)$$

が成立すると考えられるから、式(10)および(11)を用いて、

$$\ln\{1 - F(x)\} \cong -C(x - \gamma)^\alpha / \alpha! - \dots \quad (12)$$

式(8)から  $\ln\{1 - G_n(x)\}$  を求め、これに式(12)を代入すれば、

$$\begin{aligned} \ln\{1 - G_n(x)\} &= n \ln\{1 - F(x)\} \\ &= -nC(x - \gamma)^\alpha / \alpha! - \dots \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)の右辺第 2 項以下を無視して  $G_n(x)$  の漸近分布として次の分布を得る。

$$\begin{aligned} G(x) &= 1 - \exp\{-nC(x - \gamma)^\alpha / \alpha!\} \\ &= 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x - \gamma}{\beta}\right)^\alpha\right\} \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、

$$\beta = (\alpha! / nC)^{1/\alpha} \quad (15)$$

この分布は形状母数  $\alpha$ 、尺度母数  $\beta$  および位置母数  $\gamma$  をもった 3 母数ワイブル分布<sup>(6)</sup>と呼ばれるものであって、材料強度分布として極めてよく用いられるものである。

いま、材料強度  $x$  の代わりに疲労寿命  $t$  を使っても差し支えなく、この場合には疲労寿命分布を表わすことになる。

## 2. 2. 2 ワイブル分布の統計的特性

上述の式(14)における位置母数  $\gamma$  の物理的意義としては、例えば、劣化故障などである時点までは全然故障しない場合のその時間、クラック成長による破壊を考える場合にはそれが発生するまでの時間等を表すものと考えられる。このような母数のもつ物理的意義の解釈には、十分配慮する必要がある<sup>(7)</sup>。ところで、破壊は製品の使用開始と同時に起こり得るものであり、また取り扱いの簡便さの点をも考慮すれば、 $\gamma = 0$  としても議論の妥当性を欠くものではないであろう<sup>(8)</sup>。この場合には 2 母数ワイブル分布と言われ、対応した確率密度関数  $f(t)$ 、分布関数(信頼度関数)  $F(t)$ 、信頼度関数  $R(t)$  および故障率関数  $h(t)$  はそれぞれ以下のように与えられる。

$$f(t) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right] \quad (16)$$

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right] \quad (17)$$

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right] \quad (18)$$

$$h(t) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} \quad (19)$$

ただし、いずれの上式においても  $t \geq 0$  である。

式(19)の故障率関数  $h(t)$  の形から分かるように、形状母数  $\alpha$  の値を、 $\alpha > 1$ 、 $\alpha = 1$  および  $0 < \alpha < 1$  とすることにより故障率の変化のパターンをそれぞれ IFR (時間とともに故障率が増加する場合)、CFR (故障率が時間に無関係に一定の場合) および DFR (故障率が時間的に減少する場合) といずれの形態にも対応させることができ、極めて適用性・応用性の広い分布である。

また、この式(16)~(19)で規定される 2 母数ワイブル分布の統計的特性量は、例えば以下のように与えられる。

平均値 (MTTF もしくは MTBF) :

$$\begin{aligned} E[T] &= \mu, \\ &= \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

分散：

$$V[T] = \mu^2 \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right] \quad (21)$$

ここで $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数を表すものである。

### 2. 3 比例効果モデル

#### 2. 3. 1 対数正規分布の導出

対数正規分布は理論的には次のような比例効果モデル (proportional effect model) に基づき導出される分布である。いま、疲労クラックにより破壊する物理過程を考える<sup>(9)</sup>。疲労クラックが連続的に成長し、その大きさ(長さ)を表す一連の確率変数を  $X_1, X_2, \dots, X_n$  とおく。i 番目ステップでのクラックの大きさの増分を  $\Delta X_i = X_i - X_{i-1}$  として、これがその直前のステップでの大きさ  $X_{i-1}$  に比例するものとし、クラックの長さが  $X_n$  に達すると材料が破壊するとする。

$$X_i - X_{i-1} = \delta_i X_{i-1} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (22)$$

とおくと、比例定数を表す  $\delta_i$  は確率変数となる。初期のクラックの大きさ  $X_0$  は、材料中の微小な欠陥の大きさを意味し、 $\delta_i$  は独立したランダムな確率変数と仮定する。したがって、

$$\sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n \frac{X_i - X_{i-1}}{X_{i-1}} \quad (23)$$

もしこの増分  $\Delta X_i = X_i - X_{i-1}$  が、各ステップで十分小さく、 $\Delta X_{i-1} \rightarrow 0$ 、 $n$  が大きくなると、極限においては、

$$\ln X_n = \sum_{i=1}^n \delta_i + \ln X_0 \quad (24)$$

が成立する。ここに  $\delta_i$  は仮定により独立したランダムな変数であるから、中心極限定理により、 $n$  が大きい場合には  $\ln X_n$  は、近似的に正規分布に従い、それゆえ  $X_n$  は対数正規分布に従うことになる。

#### 2. 3. 2 対数正規分布の統計的特性

いま、連続的確率変数  $Y$  が正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  に従うとき、正規分布の確率密度関数  $g(y)$  は、

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (25)$$

によって表される。

ここで、 $Y = \ln T$  とおけば、 $dy/dt = 1/t$  であるから

$$f(t) = g(\ln t) \left| \frac{dy}{dt} \right| \quad (26)$$

従って、対数正規確率変数  $T$  の密度関数  $f(t)$  は

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (27)$$

となる。また分布関数は

$$\begin{aligned} F(t) &= P\{T \leq t\} = P\{\ln T \leq \ln t\} \\ &= P\{(\ln T - \mu)/\sigma \leq (\ln t - \mu)/\sigma\} \\ &= \Phi\{(\ln t - \mu)/\sigma\} \end{aligned} \quad (28)$$

ここに、 $\Phi[\cdot]$  は標準正規分布関数を表す。

$Y$  の平均  $\mu$  と分散  $\sigma^2$  と  $T$  のそれらとの間には以下の関係式が成り立ち、これが対数正規分布の統計的特性量を表す。

平均値：

$$\begin{aligned} E[T] &= \mu_1 \\ &= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (29)$$

分散：

$$\begin{aligned} V[T] &= \sigma_1^2 \\ &= \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2) \\ &= \exp(2\mu + \sigma^2) \{ \exp(\sigma^2) - 1 \} \end{aligned} \quad (30)$$

### 2. 4 疲労き裂進展過程の確率モデル

#### 2. 4. 1 疲労き裂進展過程に付随した不確定要因

実際の機械・構造物は、不規則な繰り返し荷重を受けて疲労き裂進展により破壊するのは周知のとおりである。それゆえ疲労き裂進展の確率モデル化をはかることが、耐疲労信頼性設計においては極めて重要なこととなる。

図2は疲労き裂進展過程に付随した様々な不確定要因

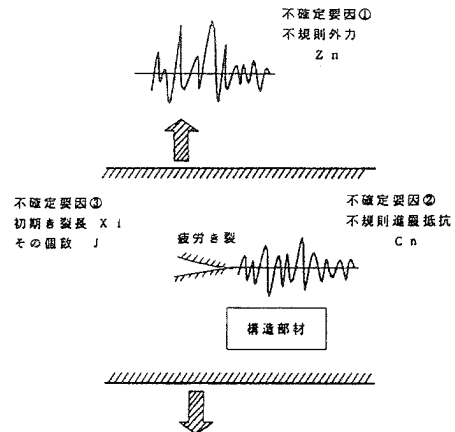


図2 疲労き裂進展過程に付随した不確定要因

のうち主要なものを模式的に示したものである。機械・構造物に作用する実働荷重は一般に不規則荷重であるから、不規則荷重のもつ不確定性がまず第1に考えられなければならない。また通常の実用材料は多かれ少なかれ不均質な内部構造を有しており、そのためき裂進展抵抗も各点各点で不規則に変動しているものと考えられるので、このための不確定性を考慮することが第2番目に重要となるであろう。次で重要と考えられるものは初期欠陥の寸法および個数のもつ不確定性である。任意に選ばれた部材中には欠陥が皆無の場合もあり、逆に多数の欠陥の存在が認められる場合も多々あるであろう。また、たとえ単一の欠陥しか存在しない場合でも、その正確な真の大きさは知り得ず、単に推定し得るに過ぎないのが現状だからである。

これらの不確定性に十分注意を払いながら、最近の破壊力学の進展の成果<sup>(10),(11)</sup>をも援用して、き裂進展過程の確率モデルを構築する。

2. 4. 2 き裂進展過程の確率モデル

Paris-Erdoganのき裂進展法則

$$\frac{dX}{dn} = \epsilon \left( \frac{\Delta K}{\Delta K_0} \right)^m = \epsilon \left( \frac{S\sqrt{x_1}}{S_0\sqrt{x_1}} \right)^m = \epsilon (Z\sqrt{X})^m \quad (31)$$

を採用し、これを基礎に置く。ここに、 $X=1/l_0$  は適当に規準化された  $n$  サイクル後のき裂長さ、 $\Delta K$  および  $\Delta K_0$  はそれぞれ  $n$  サイクル後の応力拡大係数範囲およびそれと同じ次元の定数で  $Z$  は適当に規準化された応力振幅であり、また  $\epsilon$ 、 $m$  は材料定数である。

き裂進展抵抗または外部荷重、あるいはその双方が不規則であるような場合にも、式(31)を一般化した

$$\frac{dX}{dn} = \epsilon C_n Z_n^{2(\lambda+1)} X^{\lambda+1} \quad (32)$$

なる関係が成立するものと仮定しよう。ここで  $C_n$  は無次元の局所定常不規則進展抵抗であり、 $Z_n$  はやはり局所定常の不規則応力振幅を表すものとする。

また、式(32)においては今後の便宜のため、指数  $m$  に代わって

$$\lambda = m/2 - 1 \quad (33)$$

なる定数が導入されている。一般性を失うことなく  $C_n$  はオーダ1にとることができる。このとき、実験結果は  $\epsilon$  が十分微小な正定数、 $\lambda$  は非負の材料定数となることを示している。

しかしながら、ここで注意しなければならないのは、一

般に有限の繰返し数の後に、き裂長さが無限大に遷移してしまう可能性が存在するということである。すなわち、初期に確定的な長さ  $x_1$  をもつき裂が不規則荷重を受けてランダムに進展する場合を考えれば、時間の経過とともにき裂長さは徐々に増大していき、ついには無限大にまで成長してしまう。このような場合に、時点  $n$  でのき裂長分布を考えるときには、その密度  $w(x, n | x_1)$  は  $x$  のとりうる全範囲にわたってそれを積分しても、もはやその値は1とはならない。このため、き裂進展過程においては、原理的にどうしても、き裂長さ無限大という状態に確率が集中するという事実を考慮にいれた解析が必要となる。したがって、状態空間としては実数全体  $R$  にき裂長さ無限大に対応する、死点とよばれる孤立した点  $\{\infty\}$  をつけ加えて、

$$R = R \cup \{\infty\} \quad (34)$$

を考え、状態が一度死点に達すると、それ以後は永久にその点に留まるものとする必要がある。こうした死点 (death point) という概念を導入することによって一般化した取扱いが可能となる<sup>(12)</sup>。

いま、 $n$  サイクルの荷重を受けた時の  $X$  を  $X(n)$  と表し、 $X(n)$  が死点に達する確率を、

$$P[X(n) = \infty] = P_\infty(n) \quad (35)$$

と置き、初期長さ  $x_1$  のき裂が不規則荷重を受けて、 $n$  サイクル後に長さ  $x$  ( $x \in R$ ) 以下となる確率を、

$$P[X(n) \leq x | X(0) = x_1] = W(x, n | x_1) \quad (36)$$

と表せば、明らかに、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W(x, n | x_1) + P_\infty(n) = 1 \quad (37)$$

が成立する。 $W(x, n | x_1)$  は  $x$  で微分可能であるものと仮定し、それを  $w(x, n | x_1)$  のように表そう。

ここで、マルコフ近似手法を使用することにより、疲労き裂分布  $W(x, n | x_1)$  の時間的な変動を記述する、一般化された Fokker-Planck 方程式は次の様に求めることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial n} = & -\beta(n) \frac{\partial}{\partial x} \{x^{\lambda+1} w\} - \frac{\lambda+1}{2} \gamma(n) \frac{\partial}{\partial x} \{x^{2\lambda+1} w\} \\ & + \frac{1}{2} \gamma(n) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{x^{2\lambda+1} w\} \end{aligned} \quad (38)$$

ここに、 $\beta(n)$  および  $\gamma(n)$  は、以下のように定義され、 $E[\cdot]$  は期待値の演算子を表す。

$$\beta(n) = \varepsilon E[C_n Z_n^{2(\lambda-1)}] \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \gamma(n) = & 2\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \{ E[C_n Z_n^{2(\lambda-1)} C_{n+n'} Z_{n+n'}^{2(\lambda-1)}] \\ & - E[C_n Z_n^{2(\lambda-1)}] E[C_{n+n'} Z_{n+n'}^{2(\lambda-1)}] \} dn' \end{aligned} \quad (40)$$

次に、式(38)の解を求めることにしよう。この場合、 $\lambda \neq 0$  のとき、Liouville の方程式

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial n} = -\beta(n) \frac{\partial}{\partial x} \{ x^{\lambda-1} \tilde{w} \} \quad (41)$$

の解が、 $f(x)$  を任意の関数とする時

$$\tilde{w}(x, n) = f \{ (x^{-\lambda} + \lambda \int_0^n \beta(n') dn') / \lambda \} x^{-(\lambda-1)} \quad (42)$$

となることに注意して、式(38)に次の変数変換を施す。

$$\begin{cases} w(x, n) = v(y, n) x^{-(\lambda-1)} \\ y = \{ x^{-\lambda} + \lambda \int_0^n \beta(n') dn' \} / \lambda \end{cases} \quad (43)$$

その結果、式(38)が

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{2} \gamma(n) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (44)$$

に帰結されることは容易に確かめられる。したがって、 $n \rightarrow 0$  のとき、デルタ関数  $\delta(x-x_1)$  に帰着する。領域  $(0, \infty)$  における式(38)の解は、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} w(x, n | x_1) = & \frac{1}{x^{\lambda-1} \sqrt{2\pi} \int_0^n \gamma(n') dn'} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{(x_1^{-\lambda} - x^{-\lambda} - \lambda \int_0^n \beta(n') dn')^2}{2\lambda^2 \int_0^n \gamma(n') dn'} \right\} \end{aligned} \quad (45)$$

この式(45)は、機械・構造物の耐疲労信頼性設計において広範囲に利用できるものである。

### III 外部荷重について

破壊は材料強度  $R$  と外部荷重  $S$  との関連で発生するので、外部荷重  $S$  に関する知識も同様に重要なものとなる。偶発故障モデルにおいては、 $R$ 、 $S$  とともに確率変数である場合、 $R$ 、 $S$  の同時分布を  $R \leq S$  の範囲で積分することによって故障率が得られることから、この場合にも信頼度関数が指数関数となることは容易に示すことができることは、偶発故障モデルの最後の部分で述べた通りである。

荷重にも、自重その他のように制御あるいは予測可能なものもあるが、現実の使用状態を考慮に入れるならばランダムな荷重（不規則荷重）が問題となる。この場合にはやはり統計的な取り扱いが必要となる。時間的経過によって変動する荷重を取り扱うためには、確率過程論の問題として展開することとなるであろうし、また破壊と直ちに結びつくものとしては、最大値の問題が考えられるが、これは極値統計量の分布として取り扱われる。その他観測結果を記述するにはそれぞれに適した統計理論が適用されることになるであろう。

## IV 疲労寿命分布解析への

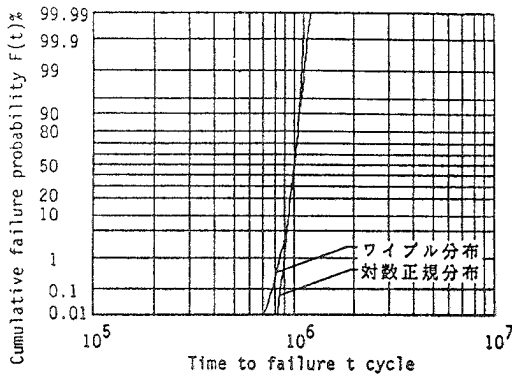
### 確率モデルの適用事例

疲労寿命  $T$  の寿命分布解析に、前述の確率モデルを適用する具体的な事例として、最弱リンクモデルから導出されるワイブル分布と比例効果モデルから導出される対数正規分布について、破壊確率  $p_f$  の観点からみた両分布を詳細に比較検討する。すなわち、平均  $\mu$  と分散  $\sigma^2$  が全く同一であるという前提の下で、設計に際して通常問題とされる小さな破壊確率  $p_f$  の領域で両分布がどのように挙動するか、特にどちらの分布の方が寿命を安全側にとっているかを比較検討するものである。

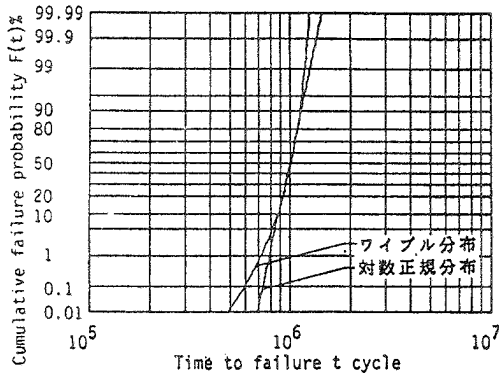
#### 4. 1 破壊確率 $p_f$ からみた両分布の比較

いま、疲労寿命  $T$  の平均寿命  $\mu_T$  および分散  $\sigma_T^2$  が両分布において全く同一であると仮定して、変動係数を種々に変化させた場合に、ある破壊確率  $p_f = P[T \leq t]$  を与える寿命の % 点  $t$  の値が、両分布においてどのように変化するかを考察する。ここでは、平均寿命  $\mu_T$  を  $10^5$  または  $10^6$  とし、その各々について変動係数  $V_T$  が 0.05、0.1、0.5 の 3 つの場合を対象とし、得られた疲労寿命の % 点を平均寿命  $\mu_T$  で割って無次元化して比較した。すなわち、両分布において平均と分散が同一なものとして所与であるから、分布母数値は式(20)、(21)または式(29)、(30)を連立させて解くことによって求められる。この母数値を用いて任意の破壊確率  $p_f = P[T \leq t]$  に対応する % 点を求めることにより両者の差異を比較することが可能となる。

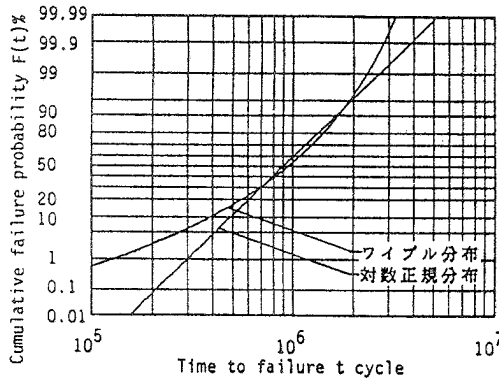
1 例として、両分布の平均寿命  $\mu_T = 10^6$ 、変動係数  $V_T = 0.05$ 、0.1 および 0.5 とした場合の両分布の累積分布関数の形状を、対数正規確率紙上にプロットして比較したものが、図 3(a)~(c) である。図から明らかなように、ワイブル分布の方が小さな破壊確率の領域で上側に位置し、所与の破壊確率に対して、短い寿命 % 点を与えることがわかる。



(a) 平均寿命  $\mu_T=10^6$ , 変動係数  $V_T=0.05$  の場合



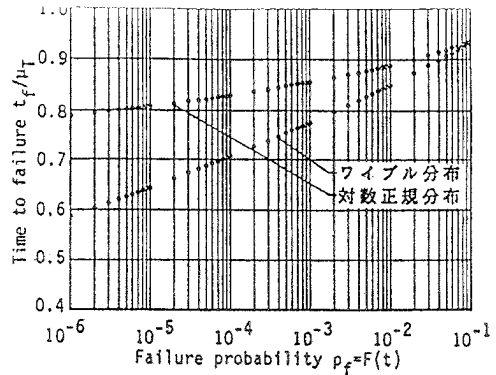
(b) 平均寿命  $\mu_T=10^6$ , 変動係数  $V_T=0.1$  の場合



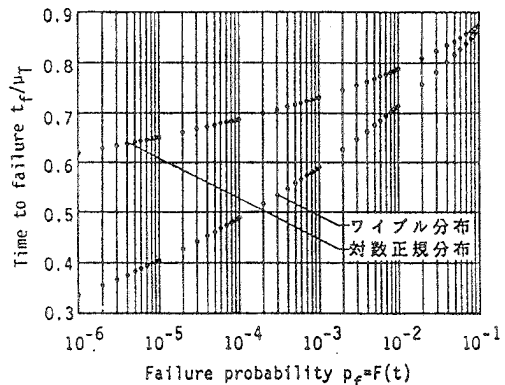
(c) 平均寿命  $\mu_T=10^6$ , 変動係数  $V_T=0.5$  の場合

図 3 平均および分散が同じ場合の両分布の累積分布関数の形状比較

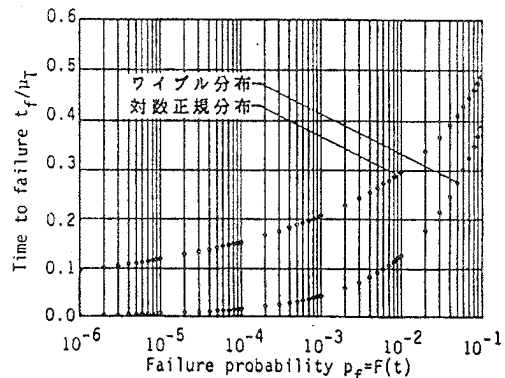
また、図 4 (a)~(c)は所与の小さな破壊確率を与える寿命の%点を図示したものである。いずれの場合も所与の破壊確率を与える寿命の%点は、ワイブル分布の方が対数正規分布に比べて小さな値をとり、疲労寿命が安全側にとられていることがわかる。



(a) 平均寿命  $\mu_T=10^6$ , 変動係数  $V_T=0.05$  の場合



(b) 平均寿命  $\mu_T=10^6$ , 変動係数  $V_T=0.1$  の場合



(c) 平均寿命  $\mu_T=10^6$ , 変動係数  $V_T=0.5$  の場合

図 4 所与の破壊確率を与える寿命%点の比較

この解析結果は耐疲労信頼性設計において、疲労寿命分布としてワイブル分布あるいは対数正規分布のいずれを適用するべきかについての一つの判断基準を提供するものとなる。



## V おわりに

本研究では、疲労破壊現象の解析において統計的な考え方が不可避であり、極めて重要であることを述べた。近年の製造技術の進歩や工程管理の発達等によって優れた品質の材料が実現し、均質なむらのない材料が提供されるようになってきているが、それでもなお材料、したがって構造物の強さに限って考えても変動があり、確率的考察が必要である。微視的であれ、巨視的であれ、現実の材料強度を左右するものが一種の不完全性であり、この不完全さを人為的に制御することが不可能であるが故に、材料強度は確率的なものであるという認識が重要であり、機械・構造物の信頼性解析において統計数学の果たすべき役割は極めて大きいものがある。

さらに、技術の向上に伴い、従来は建造できなかった高度に複雑かつ大規模な機械・構造物が実現されるにつれ、その損失による不利益が極めて大となってきたため、機械・構造物に固有のリスクを事前に評価し、所要の信頼性を達成するような設計手法を確立することが不可欠となってきている<sup>(13)</sup>。リスクは生起確率の小さい出来事の結果であり、その評価は期待値を以て行うのが合理的であることを考えれば、従来の確定論的手法は最早採り得ず、確率論的手法によらずしては社会的要請に十分応えることができ得ないのは自明であり、実際の工学的諸問題に対して、確率統計的アプローチにより問題解決をすることがますますその重要性を高めているのが現状である。

## 謝 辞

終わりに、本研究の実施に当たり終始懇切な御指導、御鞭撻を賜った、香川大学長木村 等博士ならびに香川大学教授石川 浩博士に深甚なる感謝の意を表します。

また、本研究は昭和63年度指定研究に基づいて行われたものであることを付記して関係各位に謝意を表す。

## (注)

- (1) Ishikawa, H., Tsurui, A., and Kimura, H.: Stochastic Fatigue Crack Growth Model and Its Wide Applicability in Reliability Based Design, CJMR, Vol. 2, 1987年, p. 45.
- (2) 岡村弘之, 板垣 浩: 強度の統計的取扱い, 培風館, 1979年, p. 2.
- (3) 古田 均: 構造物のファジィ診断, 日本機械学会誌, 第90巻, 第827号, 1987年, p. 31.

- (4) 横堀武夫: 材料強度学, 技報堂, 1955年, p. 4.
- (5) 文献(4)の p. 5.
- (6) Weibull, W.: A Statistical Distribution Function of Wide Applicability, J. App. Mech., 18, 1951年, p. 298.
- (7) 塩見 弘: 信頼性工学入門, 丸善, 1982年, p. 60.
- (8) 石川英利, 井面仁志, 内海明博, 石川浩: 疲労寿命分布モデルとしてのワイブル分布と対数正規分布, 日本材料学会第38期学術講演会前刷集, 1989年, p. 225.
- (9) Mann, N. R., R. E. Schafer and N. D. Singpurwalla: Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data, John Wiley & Sons, 1974年, p. 133.
- (10) Tsurui, A. and Ishikawa, H.: Application of the Fokker-Planck Equation to a Stochastic Fatigue Crack Growth Model, Structural Safety, Vol. 4, 1986年, p. 15.
- (11) Ishikawa, H., Tsurui, A. and Utumi, A.: A Stochastic Model of Fatigue Crack Growth in Consideration of Random Propagation Resistance, Proc. of Fatigue-84, Vol. 1, 1984年, p. 511.
- (12) 文献(1)の p. 47.
- (13) 文献(2)の p. 3.