

報 文

実験モーダル解析と有限要素法解析による軽量板の振動伝達関数とその合成について

富山職業訓練短期大学校 機械系 松岡 昇・小田英明・西村 勝

Transfer Response Function of Light-weighted Plates and It's Synthesis with Experimental Modal Analysis Method and Finite Element Method

Noboru Matuoka · Hideaki Oda · Masaru Nishimura

要 約 構造体の伝達関数は、インパルス加振法などによって容易に計測される。計算から求められる伝達関数は、実験モーダル解析法によるカーブフィット法がある。本研究ではモーダル解析で同定されたモード減衰比と固有値解析(有限要素法)から伝達関数の合成(合成伝達関数)を求め、それを実測伝達関数と比較している。

この結果、各振動モードの共振点では計算値の振幅が実験値に比べて、一部で30~39%増大しているものの、4.7~23.5%減少している。また低周波数域を除いては、共振点をはずれた領域で合成結果と実測結果に大きな差が現れている。これは反共振点近傍で S/N 比が悪くなり、コヒーレンス関数が低下していたためである。したがって S/N 比の高い伝達関数の計測が重要な条件となる。

I まえがき

構造体の伝達関数は、インパルス加振法などによって容易に計測される。これに対して計算から求められる伝達関数は、実験モーダル解析^{(1)~(3)}(以下モーダル解析と呼ぶ)の手法によるカーブフィット法がある。

この手法は伝達関数の解析式(外力と変位関係式)を想定し、実測された伝達関数と仮定した伝達関数をできるだけ近似させるようにするものである。カーブフィットによって得られたモーダルパラメータ(固有振動数、モード減衰比、振動モード)の結果をもとに、構造体の任意の2点間(加振点と応答点)の伝達関数を求めることができる。このようにして得られた伝達関数は、一般に合成伝達関数^{(4)~(6)}と呼ばれている。

一方、有限要素法解析からこの合成伝達関数を求めるためには、減衰マトリックスを決定しなければならない。しかし、有限要素法解析では理論的に減衰マトリックスを決定することは困難なので、モーダル解析で同定されたモード減衰比を用いている。

著者らは、モード減衰比の計測が重要であると考え、

軽量板振動のダンピング同定と計測法について報告⁽⁷⁾している。続いて本報告では、まずこの測定方法によって軽量な試験体のモード減衰比をモーダル解析の手法で計測する。つぎに合成伝達関数(以後合成伝達関数は断りがない限り有限要素法解析から求めることを示す)を、同定されたモード減衰比と固有値解析(有限要素法)から求め、それを実測伝達関数と比較したのでここに報告する。

なお、このような報告⁽⁸⁾は少なく、試験体として鋼板を用いた実例があるが、試験体に対するモード減衰比の計測法を十分検討しているとは言えない。著者らが、ここで繊維強化プラスチック系素材の軽量板を対象とし、その試験体に適したモード減衰比の計測法を考慮して求めた合成伝達関数の報告は、ないように思われる。

II 試験体

本実験では軽量試験体として繊維強化プラスチック系のグラファイト材料(G5電極)を対象にしている。表1には板状試験体の寸法と材料定数を示す。

最近、モーダル解析は構造体の動特性を解析する手法として急速に普及して広く利用されている。しかし、軽量構造体のモーダル解析から求めるモード減衰比は構造

体の支持方法によって大きく異なる。著者らは、軽量の素材の支持法⁽⁹⁾として綿糸吊るしが適当であることを明らかにしている。本実験では2本の綿糸で吊るし、振動モードの各節部の位置にそれぞれ支持してモード減衰比を計測している。

表 1 試験体

素材名	グラファイト (G5電極)
平板寸法	H20×W250×L500mm
材料定数	(1) ヤング率: $1.16 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ (2) ポアソン比: 0.20 (3) 密度: 1.80 g/cm^3 【各定数はメーカーによるデータである】

III 伝達関数の合成手順

本実験における伝達関数の合成は、つぎのようにして求めている。試験体がインパルスハンマなどによって加振されたとき、多くの振動モードが同時に励起される。ここでは試験体を線形的挙動と仮定しているので、伝達関数は、実際には個々の振動モードに対する共振曲線の和になっている。数学的表現(解析式)によって共振曲線をそれぞれ合成するためには、各振動モードのモーダルパラメータを決定しなければならない。

モーダル解析では試験体の減衰タイプを比例粘性減衰と仮定して、モーダルパラメータ(固有振動数、モード減衰比、振動モード)を推定する。

モード減衰比は、比例粘性減衰を仮定するとつぎのように表される。

$$2\xi = \alpha / f + \beta f \tag{1}$$

式(1)の係数 α 、 β は、カーブフィット法によって求められる固有振動数 $\{f\}$ とモード減衰比 $\{\xi\}$ の値をもとにして最小二乗法より決定できる。

ここでは伝達関数の合成を有限要素法解析から求めているが、モーダルパラメータの中で固有振動数と振動モードは固有値解析から求めている。一方モード減衰比は、固有値解析から求められた各振動モードに対応している固有振動数を式(1)に代入して決定する。本実験では、求められたモーダルパラメータの結果をモーダル解析ソフトウェアに組込んで合成伝達関数を求めている。

実測と合成の伝達関数は、それぞれ重ね書きして検討する。図1には、モーダル解析と有限要素法解析の手法による合成伝達関数の手順を示す。図中のシンセステータブルとは、ここで使用しているモーダル解析ソフトウ

エア上で応答点と加振点の間の合成伝達関数を求める部分に対応している。

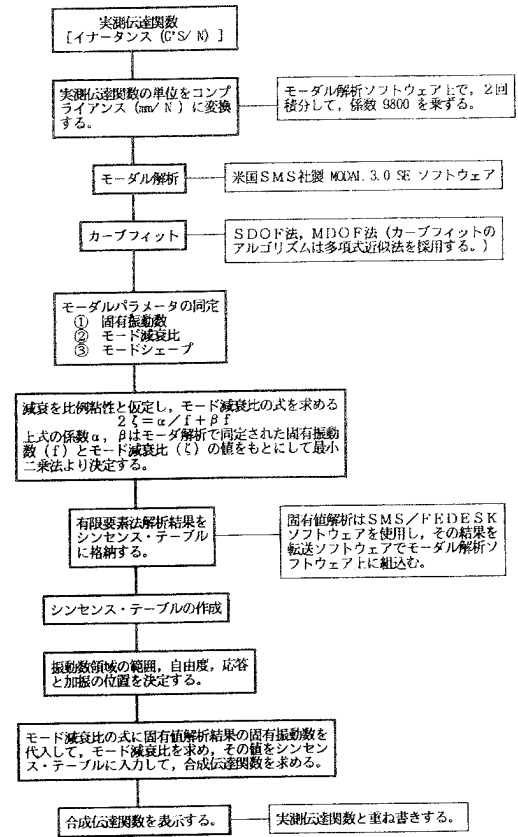


図 1 モーダル解析と有限要素法解析による合成伝達関数の手順

IV モーダル解析と有限要素法解析

1 システム構成

本研究ではつぎのような市販のソフトウェアとコンピュータを使用している。

- ①モーダル解析ソフトウェア：MODAL 3.0SE
- ②有限要素法解析ソフトウェア：SMS/FEDESK
- ③転送ソフトウェア：SASTRAN
- ④コンピュータ：HP9000シリーズ310

2 モーダル解析と有限要素法解析

モーダル解析と有限要素法解析の解析条件は表2のようになっている。この中で問題になるのは境界条件である。有限要素法解析での完全な自由-自由状態の境界条件は現実には実現が困難であり、何らかの手段で支持をしなければならない。

軽量構造体の支持は、構造体の内部に吸収されるエネ

ルギーが外部に消散するエネルギーより大きくなるよう
でなければならない。すなわち軽量構造体に適応する支
持方法は、支持部から逃げるエネルギーを出来るだけ小
さくする必要がある。具体的には、各振動モード対し
て節部で支持するようにするのが最も効果的であろう。

本実験では、2本の綿糸（長さ800mm、太さ1mm）で吊
るし、長手方向の曲げ振動モード（以下縦曲げ振動モー
ドと呼ぶ）の各節部の位置でそれぞれ支持している。

表2 有限要素法解析とモデル解析

区 分	有限要素法解析	モデル解析
解析/実験 条 件	自由度：6個（並進運動と回 転運動）	計測/駆動：Z方向（垂直）
節 点 数	231点	28点
要 素 数	200個	18個
要素タイプ	四辺形薄肉シェル要素	（直交座標系による形状定義）
境界条件	自由-自由状態	自由支持法（綿糸吊るし法）
モード次数	1~14次まで（ただし、1 次から6次までは、剛体振動 モード）	1~8次まで

3 伝達関数計測

本実験では伝達関数の計測に当たり試験体を図2のよ
うに分割し、その節点に28個の加振点を設けている。そ
の計測システムは、図3に示すようにインパルスハンマ
と圧電型加速度ピックアップ、および2チャンネルFFT
アナライザを用いて行う。

加振実験は、図4に示すようにインパルスハンマで曲
げ振動モードが励起されやすいように、板状試料の各部
を垂直方向に加振し、応答を圧電型加速度ピックアップ
で検出する。ピックアップは試験体上面に両面テープで
固定する。ピックアップは電荷感度が1.62cP/G、質量は
1.9gで、その振動数振幅特性は20kHzまで一定である。

一般に試験体とピックアップの質量の関係は、国際規
格で 1/50 倍以下となっている。本実験では約1/2000倍
以下となっているので、試験体の固有振動数がピックア
ップの質量によって影響を受けないと言える。

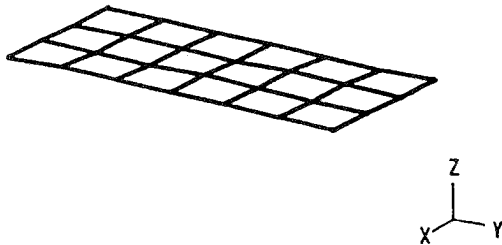


図2 モーダル解析における分割図（節点数28点）

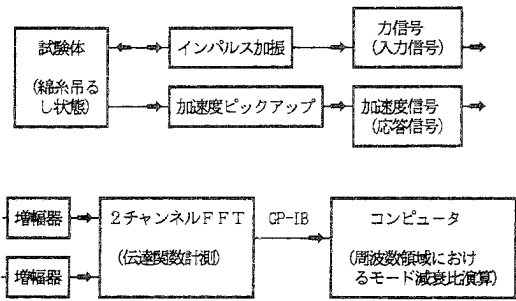
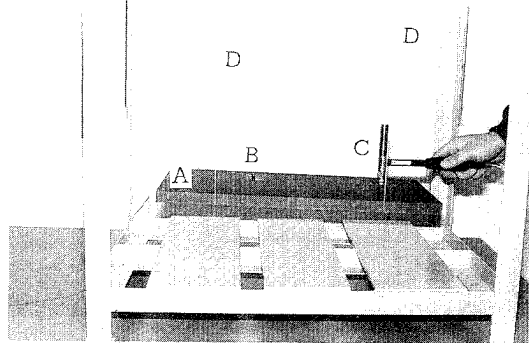


図3 伝達関数の計測システム



- A 試験体
- B 加速度ピックアップ
- C インパルスハンマー
- D 綿糸

図4 加振実験

加振点と応答点（ピックアップ固定位置）間の伝達関
数は、インパルス応答波形の振幅値を高速フーリエ変換
して求める。その応答波形の取込時間は0.2secで行い、そ
の波形の最低周波数は計測しようとする周波数範囲より
高くなるようにする必要があり、そのためにはハンマの
チップ材質を選択しなければならない。本実験では0
~1200Hzの周波数領域内に存在する共振振動数を計測す
るが、硬質プラスチックでの最低周波数はほぼ3500Hzに
なっていたので、チップの材質は適当であると言える。

信号取込時のウィンド処理は時間窓の中で完全に周期
化し、減衰する波形なので時間窓内の位置によって重み
づけが変わらないレクタングラ（矩形波）を採用する。
本実験では加振点をインパルスハンマで打撃し、応答
点に励起される加速度を測定して、加振点と応答点間の
イナータンスと呼ばれる伝達関数を求めている。

伝達関数の計測では、応答点は試験体上面に固定し、
加振点を変化させて16回の繰り返し加振の加算平均法で
求める。

図5には実測された伝達関数が表示されている。図中
の1次から8次は、振幅のピーク値を低い共振振動数順

に決めている。図を見ると、1次と2次および5次と8次のピークは明確に現れている。一方、3次と4次さらに6次と7次では2つのピークが近接して、それぞれのピークが明瞭に現れていないことがわかる。このように2つの共振ピークが近接しているのは、おそらく振動モードの節部の位置がほぼ同じような場所に存在しているものと考えられる。

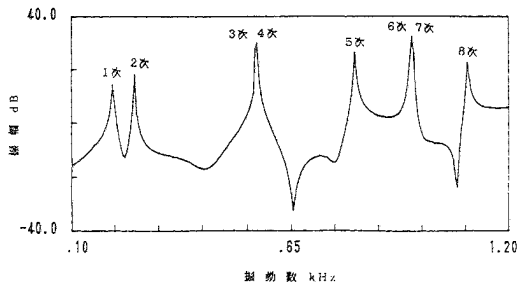


図5 実測伝達関数(数字:モード次数の共振点)

4 固有値解析(有限要素法)

固有値解析ではモデルをいくつかの要素に分割して計算する。要素の形状は何種類かあるが、板曲げの場合、三角形要素と長方形要素が一般的である。ここでは試験体を図6のように縦方向に10分割、横方向に20分割したので、要素数は200個、節点数は231点になっている。

固有値解析では、この分割によって区切られる正方形要素(25mm×25mm)を用いて計算している。計算では正方形要素の1つの頂点における自由度を6(x, y, z軸に沿った並進運動と回転運動)としている。したがって、一つの正方形要素の自由度は、節点数が4であるから全部で24になっている。

ここでは境界条件を自由状態としているので、振動モード1次から6次は剛体モードになり、7次から14次までの8つの振動モードを採用している。

本実験では、試験体の振動姿態を有限要素法解析とモーダル解析でそれぞれ対応させようとしているので、容易に比較できる振動モードを選んでいる。具体的には、モーダル解析における試験体の分割との関係により、1次から3次の縦曲げ振動モードに含まれる8つのモードまでとした。この8つの振動モードが、有限要素法解析の7～14次のモードにそれぞれ対応している。

なお、試験体を線形構造体と仮定し、減衰を考慮していない。固有値解析の計算では、表1に示されている試験体の材料定数(ヤング率, ポアソン比, 密度)と板厚を用いている。

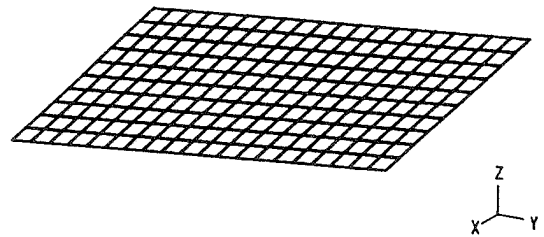


図6 有限要素法解析における分割図(節点数 231点)

V 実験結果および考察

1 固有振動数と振動モード

表3には、有限要素法解析とモーダル解析によって求められた固有振動数がモード減衰比と共に対比されている。両者の固有振動数は各振動モードに対応している。なお、表3の有限要素法解析の欄の固有振動数は、固有値解析から求めたものであり、モーダル解析の固有振動数は、カーブフィット法によって求められたものである。以後、断りがない限り両者の固有振動数の表現は、同様である。表3の有限要素法解析とモーダル解析に対するモード減衰比については、次節で説明する。

両者の固有振動数の差は1次から8次にわたって0.5～2.3%の範囲におさまっているので、よく一致していると言える。なお、有限要素法解析とモーダル解析との固有振動数の差は、±5%以内が一般的である。

表3から、3次と4次および6次と7次の固有振動数の違いは、有限要素法解析では共に10Hz、モーダル解析では3Hzと6Hzになっている。モーダル解析において、このように近接している2つの固有振動数を確認するため、それらの共振ピークを相当拡大しなげればならなかった。

なお、今回のモーダル解析による固有振動数とモード減衰比の数値が、前回(文献(7)P.71 表3のグラフアの欄)と一部異なっている。これはピックアップの取付方法に影響しているものと考えられる。前は瞬間接着剤(アロンアルファ)で取付けていたが、今回は両面テープで固定している。

一方、図7から見られるように有限要素法解析とモーダル解析による振動モードは、同じ次数の固有振動数に対して、ほぼ同じような形態が確認される。

表3 有限要素法解析とモーダル解析による固有振動数とダンピングの比較

次数	振動モード	有限要素法解析		モーダル解析		固有振動数の差 [%]
		固有振動数 [Hz]	モード減衰比 [%]	固有振動数 [Hz]	モード減衰比 [%]	
1	1次縦曲げ	205	0.13	206	0.13	-0.5
2	1次ねじり	264	0.11	259	0.11	1.9
3	2次縦曲げ	563	0.11	564	0.10	-0.2
4	2次ねじり	573	0.11	561	0.11	2.1
5	1次横曲げ	808	0.12	810	0.12	-0.2
6	2次ねじり	965	0.14	959	0.11	0.6
7	3次ねじり	975	0.14	953	0.11	2.3
8	3次横曲げ	1099	0.15	1095	0.18	0.4

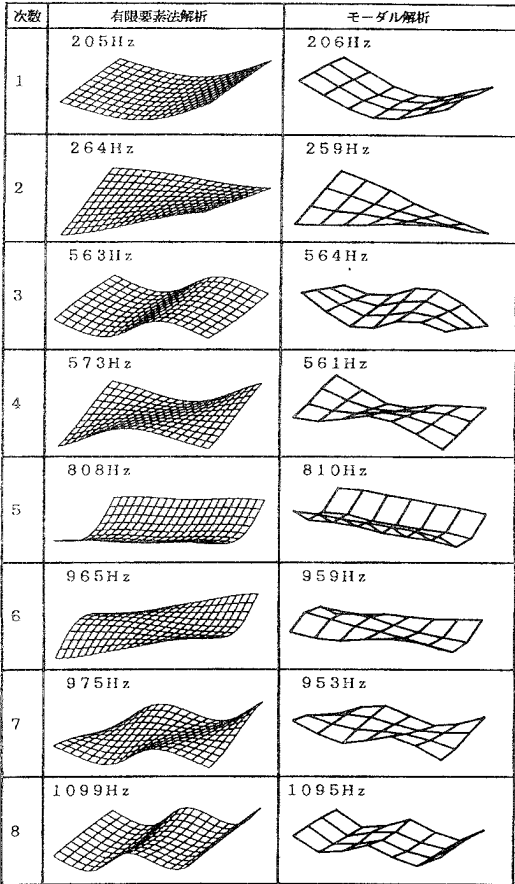


図7 振動モードの比較

2 モード減衰比の同定

著者らは軽量な素材のモード減衰比の同定⁽¹⁰⁾について検討した結果、各モード減衰比は支持糸をそれぞれの振動モードの節部の位置に設置するにすれば、1つの代表的な伝達関数を採用するだけで、カーブフィット法

によるモード減衰比の同定に十分有効であることを明らかにしている。

加速度の応答計測を時間領域で行う場合は、すべてのモードに対してモードの節部を支持することは不可能である。本実験では、支持場所として縦曲げ振動モードの節部で保持するようにした。具体的には、1次と2次および3次の節部にそれぞれ保持する。各振動モードの節部はモードアニメーションから決定している。

測定された伝達関数はコヒーレンス関数で評価している。その結果、コヒーレンス関数が各共振振動数近傍でほぼ1に近い値を示すことを確認している。

カーブフィットの手法は、各振動モードのピーク（共振峰）が離れている場合は1自由度系カーブフィット(SDOF)法で行い、複数のピークが接近してお互いに影響し合っている場合は、多自由度系カーブフィット(MDOF)法を用いている。

実際にカーブフィットするときには、共振ピーク付近に使用するデータの範囲を決定し、この指定範囲のデータからモーダルパラメータを推定する。カーブフィットのアルゴリズムは多項式近似法を採用している。図8には各共振ピークに対するカーブフィットの指定範囲とその手法が示されている。このようなカーブフィットによって作られた伝達関数（計算値）は、図8に見られるように指定範囲内にある実測伝達関数（実測値）とフィットしているので、良好な一致をしていることがわかる。

表3には、カーブフィット法によって求められたモード減衰比の値が示されている。ただし、各ねじり振動モードにおける減衰比は、支持糸を1次縦曲げモードの節部に保持した時の値である。

図9には、各固有振動数に対するモード減衰比の値が○印で表示されている。図9からモード減衰比には振動数依存性が認められる。

有限要素法解析からモード減衰比を求めるために、式(1)の α と β を決定する。具体的には、表3のモーダル解析の欄の固有振動数{f}とモード減衰比{ ξ }の関係が式(1)を満足すると仮定して、誤差の2乗和が最小になるように最小二乗法を適用して式(1)の α と β を決めれば、 $\alpha = 0.4239\text{rad/s}$ 、 $\beta = 0.0000024\text{s/rad}$ となり、式(1)に α と β の値を代入するとつぎようになる。

$$2\xi = 0.4239/f + 0.0000024f \quad (2)$$

式(2)は図9に実線で示されている。ただし、図中の ξ の式はパーセント(%)を求める値になっている。

有限要素法解析に対する各振動モードのモード減衰比は、式(2)に表3の有限要素法解析の欄の固有振動数を代

入して求めている。このようにして求められたモード減衰比は、表3の有限要素法解析のモード減衰比の欄にそれぞれ表示されている。

有限要素法解析とモーダル解析のモード減衰比を比較すると、低次モード（1～5次）ではほぼ同じであるが、高次モード（6～8次）においては、-20～21%の差が認められる。これは、両者の固有振動数の違いが大きくなっているためである。

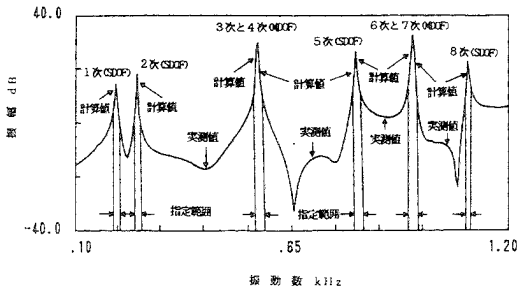


図8 カーブフィット結果

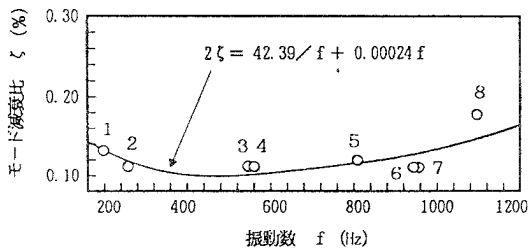
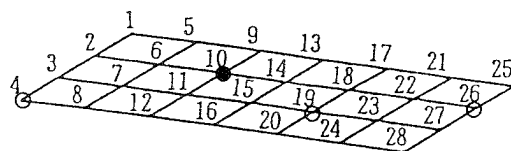


図9 モード減衰比（数字：モード次数）

3 伝達関数の比較

本実験での対象振動数領域は、0～1200Hzである。実験伝達関数と合成伝達関数を比較するために、両者の加振点と応答点が一致するような位置を図2と6から選んだ。図10には、対応している1箇所の応答点と3箇所の加振点がそれぞれ表示されている。

本実験では点10と4および点10と19、そして点10と26の間の合成伝達関数をそれぞれ求めている。これら2点間（加振点と応答点）の伝達関数は、共振ピークがそれぞれ明確に測定される位置である。



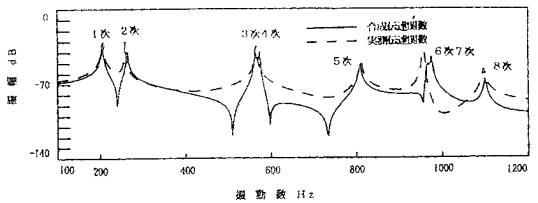
- 印：応答点 10 (81)
- 印：加振点 4 (11), 19 (150), 26 (224)
- () 内数字：有限要素法解析に対応する位置

図10 応答点と加振点の位置

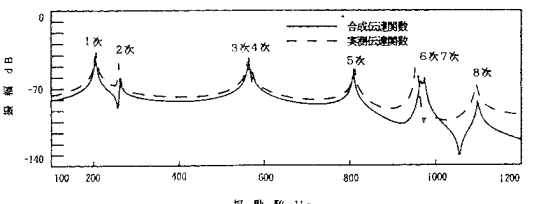
計算（合成）と実験（実測）に対する伝達関数は、それぞれ実線と破線によって図11に重ね書きで示されている。ただし、自由度は共にZ方向（垂直）で比較している。図11の(a), (b), (c)より、共振点の振幅は1次では計算値が実験値より大きくなり、2次から8次では逆に計算値が小さくなっている。

例えば図11(b)の加振点19の場合、1次の計算値が-29.4dB、実験値が-38.3dBになっている。これより計算値が実験値に対して30%大きくなっている。一方、2次では計算値が-63.5dB、実験値が-50.2dBであるから、計算値が21%小さくなっている。同様に3次では-44.5dBと-42.4dBで9%、4次では-56.7dBと-45.7dBで19%、5次では-54.8dBと-51.7dBで6%、6次では-61.0dBと-52.2dBで14%、7次では-63.5dBと-59.3dBで7%、8次では-81.0dBと-69.3dBで14%と計算値が小さくなっている。

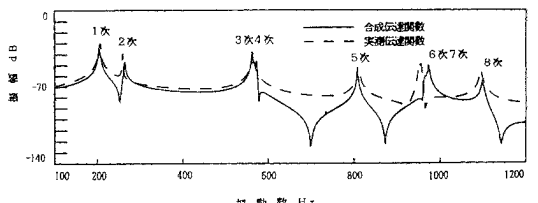
全体的に見ると、1次では計算値が実験値に対して30～39%増大し、2次から8次では計算値が4.7～23.5%減少している。



(a) 加振点 4 Z



(b) 加振点 19 Z



(c) 加振点 26 Z

図11 伝達関数の比較（数字：モード次数の共振点）

低振動数域を除いては、共振点をはずれた領域で合成結果と実験結果に大きな差が現れる。これは反共振点近

傍でS/N比が悪くなり、コヒーレンス関数が低下していたものと考えられる。したがって、応答点10と加振点4、19、26の間のコヒーレンス関数を伝達関数と共にそれぞれ測定した。図12には一例として応答点10と加振点19の間の計測結果を示す。コヒーレンス関数は32回の加算平均をしたものである。

図12から、各共振点のコヒーレンス関数は1に近い値となっているが、反共振点では0.05~0.2と低い値になっている。コヒーレンス関数が低下している振動数域は560~1600Hzであることがわかる。この領域は、図11から反共振点で合成結果と実験結果に大きな差が現れている振動数域に対応している。

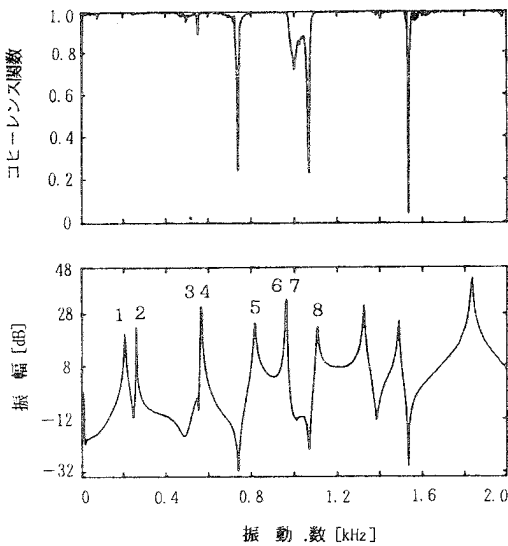


図12 実測伝達関数とコヒーレンス関数 [応答点10, 加振点19]

VI あとがき

軽量素材の振動伝達関数とその合成を比較したが、共振域で大きな差が生じた。これはコヒーレンス関数の低下によるものであった。インパルス加振はパワーが小さく、ノイズ成分の影響を受けやすい。

合成伝達関数では、ノイズを考慮しないで理論的に合成しているので、ノイズ成分を相当に含んでいた反共振点で大きな差が現れていたのである。このように、S/N比の高い伝達関数の計測が重要な条件となる。

インパルスハンマによる加振点は一般にS/N比が悪く、そのために周波数範囲全域にわたって1に近いコヒーレンス関数を得るためには、加振の平均化回数をできるだけ多くする必要がある。

また、ここでのモデルモデルが実験結果をいつも完

全には表現できないことも考えられる。今回は振幅の比較であったが位相も検討する必要がある、これらは今後の課題である。

VII 謝辞 加川幸雄教授(岡山大学工学部)には、日頃ご指導ご鞭撻をいただいている。ここに感謝の意を表す。

VIII 参考文献

- (1) 加川・伊川, モーダル解析入門(1987), オーム社.
- (2) 長松, モード解析(昭60), 培風館.
- (3) 日本機械学会編, モード解析の基礎と応用(昭61), 丸善.
- (4) 長松・大熊, 区分モード合成法による振動解析(第1報 固有振動数と固有モード, その1), 日本機械学会論文集(C編), 46巻416号, 1980, P.1463.
- (5) 大熊・長松, 特性行列の実験的決定による系の同定(第3報 実測データからの固定, その1), 日本機械学会機械力学講演会(昭61-8).
- (6) 大熊・長松, 特性行列の実験的決定による系の同定, (第1報 方法の提案と基礎的検討), 日本機械学会論文集(C編), 51巻464号, 1985, 719.
- (7) 松岡・小田・西村, 軽量板振動のダンピング同定と計測法について, 報文誌(報文), 第2巻第1号(1990-3), pp.65~71.
- (8) 文献(2), pp.174~177
- (9) 文献(7), p.70.
- (10) 文献(7), p.68.