

倒立振子の試作

青森職業訓練短期大学校 伊藤 祐規

Trial Production of the Inverted Pendulum

Yuuki Itou

要約 メカトロニクスを学ぶ学生にとって、フィードバックの概念を身につけることは不可欠となっている。フィードバックは、機械的な動作をする不安定機械系を例にとると理解しやすい。倒立振子と呼ばれる、制御しなければ倒れてしまう不安定なシステムの制御系を、線形制御理論を用いて試作した。メカトロニクスを学ぶという観点から機械系のパラメータ推定にもできる限りパソコンを用い、また、物理モデルから数式モデルを導き出しフィードバックパラメータを求める一連の作業過程は、パソコン上でシミュレーションした。機械系のパラメータは、摩擦や抵抗、振動、モータ特性を考慮すると単純化した物理モデルとは異なる。そこでシミュレーション結果を参考にして制御動作を行い状態変数を記録し、シミュレーションと比較して大きく異なる場合は、機械系のパラメータを変更してシミュレーションと制御動作を繰り返した。

試作した倒立振子では、フィードバックパラメータの取りうる範囲が広いために、その値を変化させることにより倒立状態での位置と角度の変動幅が変化し状態変数とそのフィードバックの関係が非常によく解る。

I はじめに

電子機械系では、制御工学、メカトロニクスの実験実習を行ってきている。

マイコン制御によるフィードバックを学ぶためには、制御対象のモデリング、解析、デジタル化、評価関数の設定、シミュレーション、試作組立、応答測定、シミュレーションとの比較、以上の一連の手順を繰り返して行える簡単な制御対象が必要となる。倒立振子では、制御しなければ、安定倒立しないことは、明らかであり誰にも制御の必要性が理解できる。また、手のひらに棒を立てることを考えれば、どの様に棒を動かすことが必要かも想像できる。従って、学生にとって親しみやすい制御対象である。

本稿では、具体的にどの様にして倒立振子の設計を進めたかを示し、フィードバックの概念を得るには、上記の一連の手順を繰り返し試す必要性を示す。

II 試作システムの構成

図1にシステムの構成図を示す。1本の棒にベアリン

グで案内され水平方向に滑らかに移動できる台車を取り付ける。倒立制御では、制御開始直後の約10ステップまでは、非常に大きな操作量が必要となる。そこで台車の案内を1本の棒にして台車を軽量化し加速を容易にした。棒の両端には、台車が暴走した場合に備えて非常停止用のスイッチを付けておく。台車は、ワイヤを介して両端のプーリと結ばれている。タイミングベルトでは制御動作時に振動を起こすことがあり、それが安定した倒立を乱す大きな外乱となる。ここでは、ウレタンチューブをかぶせた直径1ミリの1号のワイヤを用いた。直流サーボモータの出力軸と駆動軸との結合は、カップリングを使って両軸を直結した。他端のプーリには、ロータリエンコーダを直結している。振子の役割をする棒は、台車上のベアリング入りの軸受けで支えられている。振子の傾きの検出と角速度の推定は、振子に直結したロータリエンコーダで行う。パソコン PC98RX には、サーボアンプのON-OFFリレー、D/Aコンバータ、アップダウンカウンターの拡張ボードと数値演算プロセッサが、実装されている。

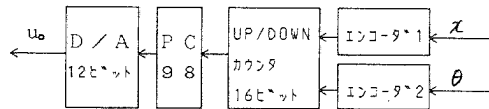
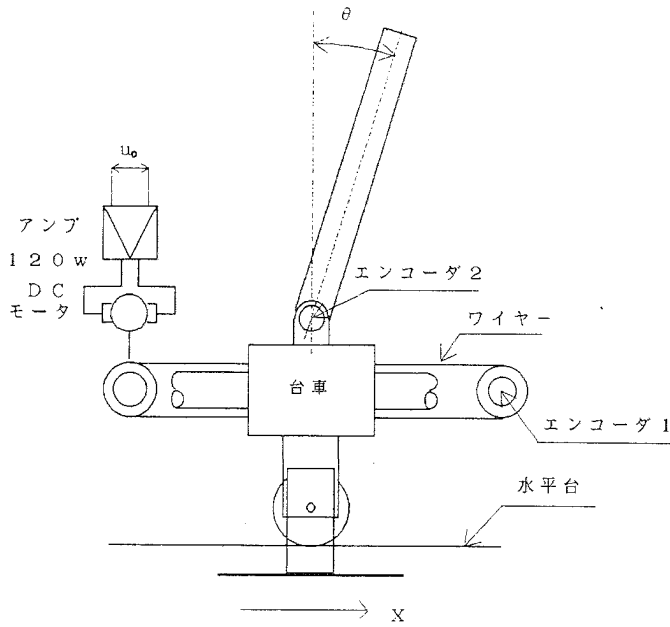


図1 システム構成図

Ⅲ 数式モデル^{(1),(2)}

- M[kg] 台車、プーリ、モータ慣性質量を含めた質量
- m[kg] 棒の質量
- 2l[m] 棒の長さ
- J[kgm] 棒の重心回りの慣性モーメント
- u[v] アンプ入力電圧
- x[m] 台車の重心位置
- θ[rad] 棒の傾き角
- c₁[N/v] アンプ入力電圧と台車に働く力を結ぶパラメータ
- c₂[Ns/m] 台車速度と台車に働く力を結ぶパラメータ

台車の位置 x [m]、棒の傾き角 θ [rad]、パワーアンプの入力電圧 u₀[v] は、コンピュータ内では無次元の数値 x₁、x₂、u で表現するものとする。それぞれの変数について、次のように変換係数 β₀、β₁、β₂をとる。

$$x = \beta_1 x_1, \quad \theta = \beta_2 x_2, \quad u_0 = \beta_0 u \quad (1)$$

また、

$$x_3(t) = \tau_0 \frac{dx_1}{dt}(t), \quad x_4(t) = \tau_0 \frac{dx_2}{dt}(t) \quad (2)$$

と定義すると、倒立振子は次のように記述される。

$$\tau_0 \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -f_1 & -f_2 & 0 \\ 0 & f_3 & f_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (3)$$

ただし

$$\tau_0^2 = \frac{A\beta_1}{(J+m\ell^2)C_1\beta_0}, \quad f_1 = \frac{m^2\ell^2g\beta_2}{(J+m\ell^2)C_1\beta_0}, \quad f_2 = \frac{C_2\beta_1}{C_1\beta_0\tau_0}$$

$$f_3 = \frac{(M+m)m\ell g\beta_1}{(J+m\ell^2)C_1\beta_0}, \quad g_4 = \frac{m\ell\beta_1}{(J+m\ell^2)\beta_2}, \quad f_4 = f_2 \cdot g_4 \quad (4)$$

$$A = (M+m)(J+m\ell^2) - m^2\ell^2$$

また出力変数 y は

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

となる。

IV パラメータ決定

Table 1に、倒立振子の数式モデル(3)に含まれるパラメータの値を示す。

Table 1 倒立振子のパラメータ

$M[\text{kg}]$	0.2	$C_2[\text{Ns/m}]$	2.0
$m[\text{kg}]$	0.02	$\beta_0[\text{V}]$	4.88×10^{-3}
$\ell[\text{m}]$	0.4	$\beta_1[\text{m}]$	7.85×10^{-5}
$J[\text{kgm}]$	1.388×10^{-3}	$\beta_2[\text{rad}]$	3.14×10^{-4}
$C_1[\text{N/V}]$	1.72		

J は物理振子の周期より求めた。倒立振子の数式モデルを導いた経過をたどれば、台車より振子を取りはずすと、

$$M\ddot{x} + c_2\dot{x} = c_1u_0 \quad (6)$$

となる。速度は、加える電圧にたいして1次遅れの系となることをしめす。従って、台車みのステップ応答と既知の質量 M^* を台車に加えた場合のステップ応答を比較することにより M , c_1 , c_2 を求めることができるのであるが、図2に示すように、台車と動力伝達機構を軽くすると、入力電圧と速度のステップ応答はカップリングが弾性変形する影響により、2次遅れ系を示した。そこで、 M , c_1 , c_2 については、シミュレーションと実際の制御動作が同じ傾向を示す値を実験的に求めた。

速度[m/s]

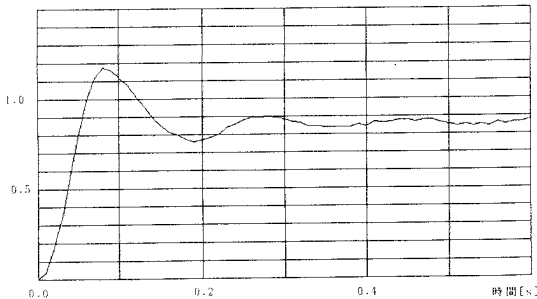


図2 計量化した台車のステップ応答 ($u_0=1.0\text{V}$)

β_0 は12ビットで $\pm 10[\text{V}]$ 対応すること、 β_1 はエンコーダ1が $2400[\text{p/rev}]$ とプーリの直径 $60.0[\text{mm}]$ から、 β_2 はエンコーダ2が $20000[\text{p/rev}]$ から求まる。

V コントローラ的设计

(3)式で示される制御対象にパラメータを代入し、サン

プリング時間を10ms (10msは、PC98に内蔵されているタイマLSI8253から割り込み信号を発生させる。)とし計算遅れを考慮して状態方程式を書き改めると

$$\begin{aligned} x(k) &= [x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k) \ x_4(k)] \\ x(k+1) &= Ax(k) + bu(k-1) \end{aligned} \quad (7)$$

A, bは

$$A = \begin{pmatrix} 1.000 & -1.284 \times 10^{-4} & 2.171 \times 10^{-1} & 5.096 \times 10^{-6} \\ 0.000 & 1.001 & 4.665 \times 10^{-3} & 2.278 \times 10^{-1} \\ 0.000 & -1.110 \times 10^{-3} & 9.075 \times 10^{-1} & 5.522 \times 10^{-7} \\ 0.000 & 7.934 \times 10 & 4.031 \times 10 & 1.001 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2.513 \times 10^{-2} \\ -1.095 \times 10^{-2} \\ 2.171 \times 10^{-1} \\ -9.462 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

となる。

コントローラは評価関数 J

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} |q_1 x_1^2(k) + q_2 x_2^2(k) + q_3 x_3^2(k) + q_4 x_4^2(k) + ru^2(k)| \quad (8)$$

を最小にするような状態フィードバック制御を行うものとする。すなわち

$$\begin{aligned} u(k) &= k_1 \{r(k) - x_1(k)\} - k_2 x_2(k) \\ &\quad - k_3 x_3(k) - k_4 x_4(k) - k_0 w_0(k) \end{aligned} \quad (9)$$

$$w_0(k) = u(k-1) \quad (10)$$

この場合、評価関数の係数 q_1 は指定された位置で安定倒立させることであるため $q_3 = q_4 = 0$ とした。 q_1 , q_2 についてはシミュレーションしてみても過大な操作量 u を必要としない $q_1 = q_2 = 100$, $r = 1$ と、 $k_0 = 0.971$, $k_1 = -5.954$, $k_2 = -32.94$, $k_3 = -72.71$, $k_4 = -170.9$ となる。得られたフィードバック係数が妥当なものかを確認するために最も簡単なシミュレーションを行う。図3は、すべての状態変数が0の初期状態から台車の位置の目標値 $r=100$ を与えたときのステップ応答をシミュレーションしたものである。

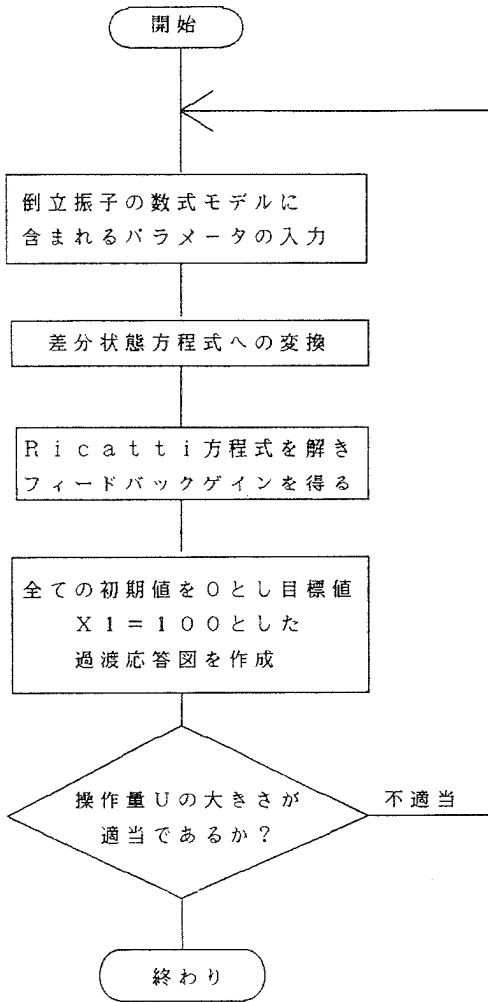


図3 コントローラ設計手順

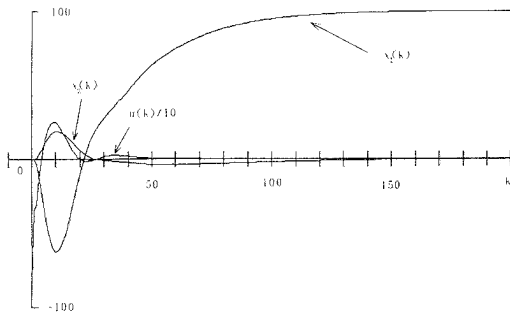


図4 過渡応答シュミレーション

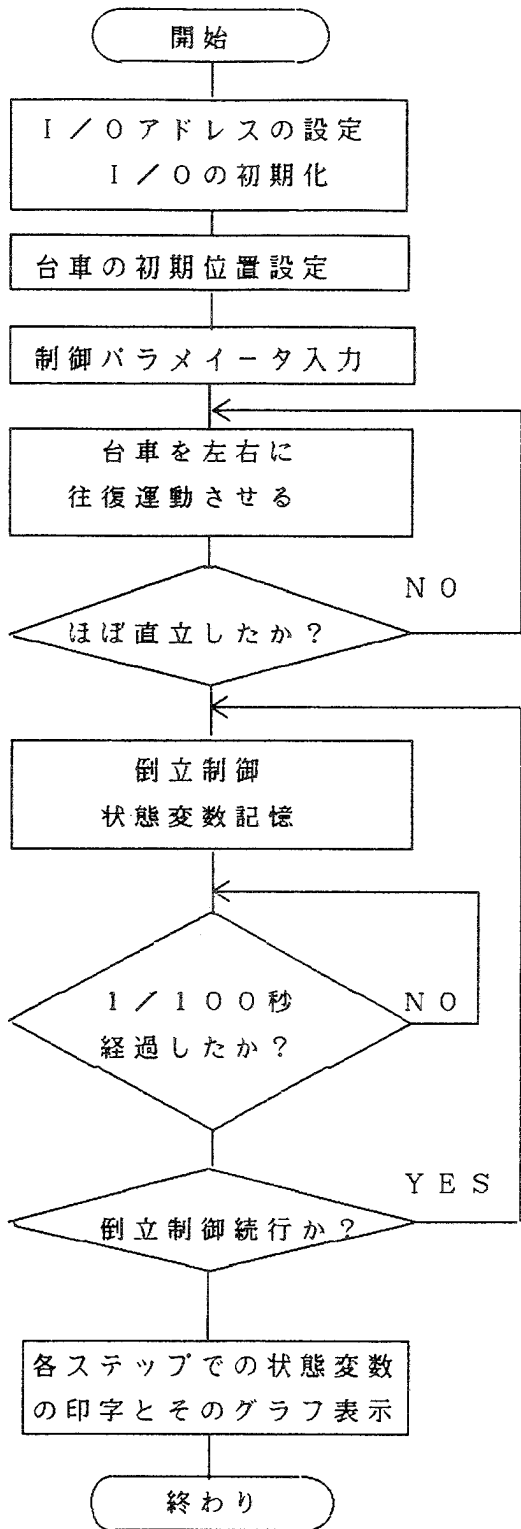


図5 倒立制御手順

VI 実験

ここでは台車に定速度の往復運動を振子の共振状態を見ながら続行させる。すなわち、台車は振子の周期よりも短い時間で、設定された距離を移動する。台車は、振子が逆向きに運動を開始するのを待って、往復運動を開始する。これを繰り返すと振子の振れ角は、しだいに大きくなり、ついには、振子は1回転しそうになる。そこで、振子が往復運動の左端か右端ではほぼ倒立した状態になるのを待ちその場で安定的に倒立するようにする。その時、状態変数が持つ初期値は、振子の角度とその角速度だけとなる。また、台車は、安定化制御開始直後には必ず逆方向に運動を開始する。したがって、台車が移動できる範囲が制限されていても大きな角速度を与えないかぎり安定化制御が可能になる。図6と図7に倒立振子の安定化実験のシミュレーションと実験値を示す。位置を示す $x(k)$ にわずかな変動が継続するのは、モータと駆動軸を結合しているカップリングがわずかに弾性変形すること、振子が垂直に倒立したときの傾き角をぴったり零に設定できないことが影響していると思われる。

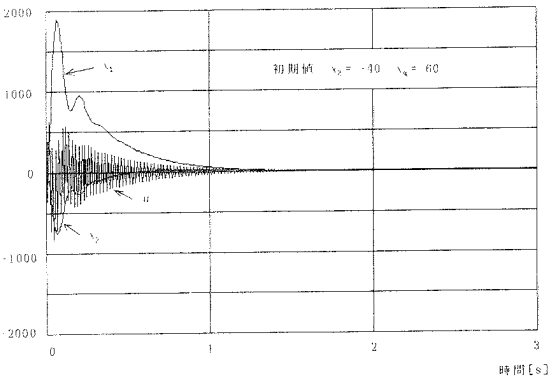


図6 安定化シミュレーション図

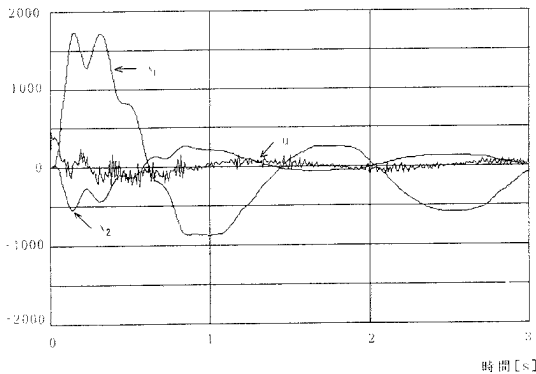


図7 安定化実験

VII まとめ

試作した倒立振子は、非常に安定した倒立制御が可能である。倒立後位置を改めて指定してやると倒立状態を保ちつつ指定された位置まで移動する。図8は、倒立後それぞれ6秒、14秒、17秒経ってからそれぞれ位置を $x_1=1800$, $x_1=200$, $x_1=-800$ に指定した場合の実測値を示す。それぞれの位置で、安定して倒立していることがわかる。一度の試みで実態とモデルが一致することはない。そこでシミュレーションと実際の制御動作を何度も繰り返して比較する。この作業を通じて学生は、フィードバックの概念を身につけていく。また、制御対象が倒立振子のように動きが目に見えてよく解るものほどフィードバックについて理解しやすくなる。製作にあたり卒研生の工藤、藤田、山内君の協力に感謝する。

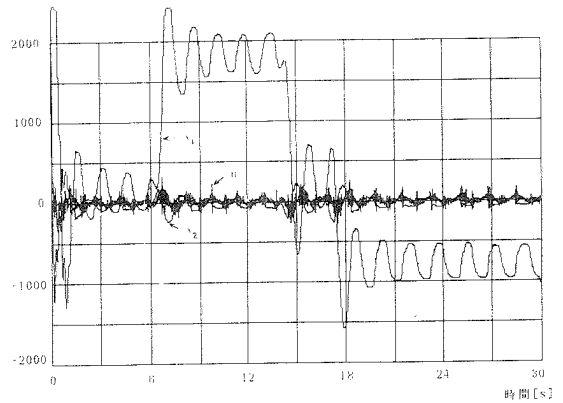


図8 位置制御実験値

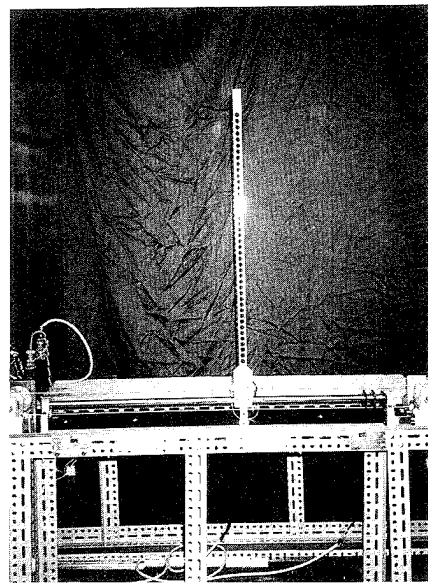


写真1 試作した倒立振子

参考文献

- 1) 森下, 上野: デジタル制御工学, オーム社(1987)
- 2) 美多, 原, 近藤: 基礎デジタル制御, コロナ社(1988)
- 3) トランジスタ技術 SPECIAL No14 141/143 (1989)
- 4) 伊藤: 倒立振子の試作, 第3回実践教育研究会講演予稿集(1990)