報　文

統計的手法による微分法理解上の問題点把握に関する一考察

岡山職業訓練短期大学校　宮内　克之

Study on Seizing the Several Points for Understanding Differential Calculus by Statistical Methods

Katsuyuki Miyauchi

要　約　職業訓練短期大学校への入学者の数学履修状況の差異、基礎学力のバラツキは大である。このような学生に対して、現行の限られた時間の中で、指導者側でどのような点に重点をおいて教育訓練を行なえば、より効果が得られるのか。あるいは教育訓練を行なっていく過程において、学生がどのような内容の箇所に疑問を感じ理解が困難となってゆくのか。またどのような要素が理解を妨げているのかを的確に把握することは極めて重要である。

本研究においては、微分法の場合に関して、アンケート調査結果および試験結果を統計的手法により分析を行ない、学生が微分法を理解する上での問題点を具体的に把握し、対応策を提示し、教育訓練効果の向上を計る一助とした。またその対応策を考慮して1991、1992年度の教育訓練を実施した結果、明らかな効果が認められた。

I　まえがき

職業訓練短期大学校への入学者の出身高校および卒業課程は多岐にわたる。表－１に過去３年間の当校への入学者の状況を示すが、当校の場合も決して例外ではない。また表－２、および表－３には、過去３年間において数学（微分積分学）の授業の最初の時間（４月上旬）に実施した、高校における数学履修のアンケート（表－２には参考として、高等学校の内申書による被験者の数学履修状況の調査結果が併せて示してある。）および簡単な関数の微分に関するテストの結果である。これを見れば明かに数学履修状況の差異、基礎学力のバラツキが大であることがわかる。また実際に授業を行なっていく上では、全体を知ってしまっている指導者の立場と、初めて学ぶ、あるいは過去に学んだことはあるが十分に理解できていない学生の立場とでは、問題理解上の難点が異なることがあるものと思われる。更に学生が理解できないのは、ただ単一の要因によるためではなく、複数個の要因が複雑に絡み合った結果、理解を妨げているものと思われる。

一方全体レベルを対象とした教育訓練の実施が困難な状況の中で、更に限られた時間の中で、指導者側でどのような点に重点をおいて教育訓練を行なえば、より効果が得られるのか。あるいは教育訓練を行なっていく過程において、学生がどのような内容の箇所に疑問を感じ理解が困難となってゆくのか。またどのような要素が理解を妨げているのかを的確に把握することは極めて重要である。

そこで本研究においては、微分法の場合に関して、アンケート調査結果および試験結果を統計的手法により分析を行ない、学生が微分法を理解する上での問題点を具体的に把握し、対応策を提示し、教育訓練効果の向上を計る一助とした。またその対応策を考慮して1991、

論文受付日　1992.7.2

1992年度の教育訓練を実施した結果の効果についても検討した。

なお本研究の対象としている学生は、1990、1991年度においては生産技術、制御技術、自動機械、電子・情報技術科の4科、1992年度は、生産技術、制御技術、情報技術、電子技術科の4科に在籍の学生である。

表－1　入学者の状況(卒業課程別：デザイン科を除く)

卒業課程	普通	工業	商業	その他	合計
1990年度	66 (90.4 %)	6 (8.2 %)	1 (1.4 %)	0 (0.0 %)	73 名 (100 %)
1991年度	66 (80.5 %)	11 (13.4 %)	3 (3.7 %)	2 (2.4 %)	82 名 (100 %)
1992年度	96 (78.1 %)	26 (21.1 %)	1 (0.8 %)	0 (0.0 %)	123 名 (100 %)

表－2　高校における数学履修状況

(上段:アンケート結果、下段:内申書による調査結果)

履修形態	数 II	基礎解析	基礎解析 微分積分	その他	合計 (回答者)
1990年度	7 (9.6 %)	15 (20.5 %)	51 (69.9 %)	0 (0 %)	73 名 (100 %)
	5 (6.9 %)	22 (30.1 %)	45 (61.6 %)	1 (1.4 %)	73 名 (100 %)
1991年度	13 (16.1 %)	18 (22.2 %)	50 (61.7 %)	0 (0 %)	81 名 (100 %)
	10 (12.3 %)	18 (22.2 %)	48 (59.3 %)	5 (6.2 %)	81 名 (100 %)
1992年度	25 (20.7 %)	26 (21.5 %)	70 (57.8 %)	0 (0 %)	121 名 (100 %)
	20 (16.5 %)	33 (27.3 %)	67 (55.4 %)	1 (0.8 %)	121 名 (100 %)

表－3　入学時におけるテスト結果

関数		x^2	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	e^{x^2}	合計
1990年度	正解者	66	23	16	73 名
	非正解率	9.6 %	68.5 %	78.1 %	
1991年度	正解者	68	21	8	81 名
	非正解率	16.1 %	74.1 %	90.1 %	
1992年度	正解者	104	25	11	121 名
	非正解率	14.1 %	79.3 %	90.9 %	

II　学生と指導者の理解上の難点の差異の把握

1　微分法の難易度の数量化

理解上の問題点を的確に把握するためには、対象となる関数を微分する場合の難易度を何らかの手法により数量化する必要がある。本研究においては指導者と学生のギャップの把握が目的であるので、各短大の数学担当者に一対比較法[(1)]によるアンケート調査を実施し、Thurstone-Gulliksenの手法[(2)]を用いて対象となる関数の微分の難易度を一次元間隔尺度として数量化した。

(1) 数量化の対象関数

数量化の対象とした関数は、1990年度当時当校における微分積分学の授業で使用していた教科書[(3)]に記載されている関数を参考とした13関数（表－5の関数に x^2 を加えたもの）である。

(2) 一対比較法によるアンケート調査

アンケート調査の実施は1990年6月であり、各短大の数学担当者にアンケート用紙を送付する形で実施した。アンケートは、上記13関数より2関数づつのペアを作り、難しいと思われる方の関数を選択してもらう形式である。またアンケートに際しては、アンケートに出て来る順を乱数により決定し、比較順序による影響を排除した。なお、アンケートの設問内容および被験者に示した難しさの判断基準は表－4のとおりである。回答があったものの中から、一対比較法の一意性の係数により回答の有効性を検定した。その結果有効回答10件が得られたので、これを基に間隔尺度の構成を行なった。

(3) 間隔尺度の構成

一対比較法により得られたデータを基に、Thurstone-

表－4　アンケートの設問内容および難しさの判断基準

設問内容	次の二つの関数の微分で難しいと思われる方に○印を付けて下さい。
難しさの判断基準	・学生が理解しがたく、難しいと感じているようだ。 ・教えてみて、多分こちらの方が学生には難しいだろう。

Gulliksenの手法により各関数の微分の難易度を関数 x^2 を除く12関数について一次元間隔尺度として数量化した。その結果を表－5に示す。（表－5では便宜上最も難易度の高い関数を100としてある。）

表－5　微分方に対する難易度の一次元間隔尺度

関数	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$(x+3)(x^2+2)$	$(x^3+x)^4$	$\log(x^2+1)$	$\cos^2 x$	$\frac{x}{x^2+2}$
間隔尺度	0.00	0.81	9.75	15.27	23.27	26.96
関数	e^{x^2}	$y^3=4x$	$e^{2x}\cdot\sin x^2$	$\cos^{-1}x$	x^{x^2}	$\cos^{-1}x^2$
間隔尺度	39.63	55.34	59.62	81.44	90.43	100.00

2　教育訓練終了時における学生の理解度の調査

微分法に関する教育訓練が終了した段階で表－5に示す関数を含む12関数について導関数を求めるテストを実施した。その結果を表－6に示す。

表－6　学生に対するテストの結果

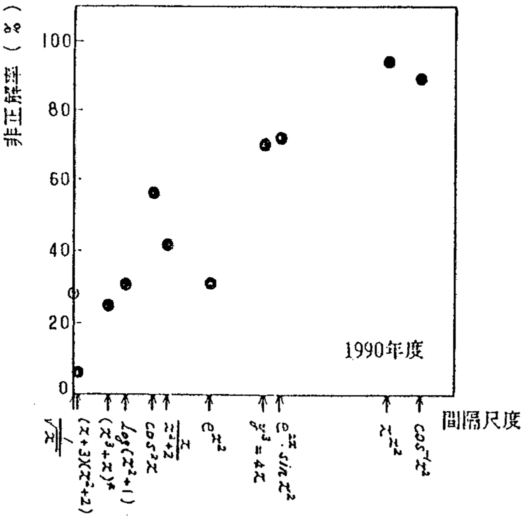
（%）

関数	1990年度 64名 非正解率	1991年度 75名 非正解率	1992年度 122名 非正解率
x^2	0.0	0.0	1.6
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	28.1	36.0	17.2
$(x+3)(x^2+2)$	6.3	6.7	7.4
$(x^3+x)^4$	25.0	38.7	21.3
$\log(x^2+1)$	31.3	14.7	21.3
$\cos^2 x$	56.3	48.0	47.5
$\frac{x}{x^2+2}$	42.2	26.7	41.0
e^{x^2}	31.3	8.0	36.9
$y^3=4x$	70.3	80.0	49.2
$e^{2x}\cdot\sin x^2$	71.9	54.7	59.8
x^{x^2}	93.8	72.0	69.7
$\cos^{-1}x^2$	89.1	69.3	85.3

3　難点の差異の把握

指導者に対するアンケート調査より得られた各関数の微分に対する難易度の間隔尺度と学生に対して行なったテストの非正解率との関係を図－1に示す。これを見ると間隔尺度が大きくなると非正解率が高くなる傾向にある。しかしながら、関数 e^{x^2} では難易度の割に非正解率が低い。すなわち指導者が考えている以上に学生にとっては導関数を求めることが容易であるものと考えられる。これは関数 e^xが一度微分をしても e^xと関数の形が変化しないという特殊性によるものと考えられる。

これに反し、関数 $1/\sqrt{x}$，$\cos^2 x$の微分においては、指導者が判断する難易度の割に学生にとっては、実際には微分ができないという結果を示した。これは、関数$1/\sqrt{x}$が無理関数であること、また関数$\cos^2 x$は微分に際して合成関数の微分の考え方を必要とするためと考えられる。



図－1　間隔尺度と非正解率との関係

Ⅲ　数量化理論第Ⅰ類による理解困難要素の把握

まえがきのところでも述べたように学生が理解できないのは（具体的にはある関数の微分ができないのは）、ただ単一の要因によるものではなく、複数の要因が複雑に絡み合った結果理解を妨げているものと考えられる。複雑な現象の解析方法としては、多変量解析の手法が一般的によく知られているが、本研究においては、各関数の有する特性要因が質的データであることを考慮し、数量化理論第Ⅰ類による分析[4]を試み、各関数の有する特性要因の理解度（実際には理解できない度合）に及ぼす影響を数量として表わし、学生の理解を妨げている要因

がどこにあるのかを具体的に把握した。

1　数量化理論第Ⅰ類による分析

学生に対して実施したテストに出題した関数のうち11種の関数の特性要因を3個のアイテムと11個のカテゴリーに分類した。カテゴリーの数に関しては、AICによりその有効性を検討した。また数量化を行なう際の外的規準としては、教育訓練終了時に行なったテストでの各関数の非正解率を用いた。これを表－7に示す。

2　分析結果および考察

数量化理論第Ⅰ類の分析結果はカテゴリーウェイトの形で数量として得られる。今の場合カテゴリーウェイトの数量が大きいほど問題に対する非正解率への影響が大きいと言うことになる。この結果を表－7に示す。分析の結果より、関数の種類としては、無理関数・三角関数、関数の形としては、関数の商の形で与えられているもの、また関数の形が複雑で、微分に際して変数の変換を行ない、合成関数の微分法を適用して求めるものが特に影響を及ぼしているものと考えられる。

Ⅳ　指導する際の具体的対応策およびその効果

1　指導する際の具体的対応策

微分法の難易度とテスト結果の対応、および数量化理論第Ⅰ類による分析の結果、次のような要因を有する関数の微分が難しいものと考えられる。

①無理関数を含む関数

例えば、　$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

②関数の商の形をしている関数

例えば、　$\dfrac{x}{x^2+2}$

③合成関数の微分法の考え方を必要とする関数

例えば、

$(x^3+x)^4$, $\log(x^2+1)$, $\cos^2 x$

表－7　数量化理論第Ⅰ類のデータシートおよび分析結果

アイテム	関数の種類						関数の形			合成関数		外的基準
カテゴリー	有理関数	無理関数	対数関数	指数関数	三角関数	その他	単独	積の形	商の形	無使用	使用	非正解率（%）
x^2	○						○			○		0.0
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$		○					○			○		28.1
$(x+3)(x^2+2)$	○							○		○		6.3
$(x^3+x)^4$	○						○				○	25.0
$\log(x^2+1)$			○				○				○	31.3
$\cos^2 x$					○		○				○	56.3
$\dfrac{x}{x^2+2}$	○								○	○		42.2
e^{x^2}				○			○				○	31.3
$e^{2x}\cdot\sin x^2$					○			○			○	71.9
x^{x^2}						○	○				○	93.8
$\cos^{-1}x^2$						○	○				○	89.1
ウェイト	-22	8	-16	-16	12	44	-6	5	38	-17	10	
偏相関係数	0.997						0.988			0.988		
重相関係数	0.998											

これに対して指導する際の具体的な対応策としては、次のような方法が効果的と考えられる。

(1) 無理関数を含む関数への対応

$(x^2)'=2x$ という微分はほとんどすべての学生が正解に至ることを考慮して、無理関数を含む関数は、

$$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}},\ 1/\sqrt{x}=x^{-\frac{1}{2}}$$

のように指数表示に変換してから微分するよう指導する。ただし、

$$(x^a)'=a\cdot x^{a-1}$$

において a がすべての実数に関して成り立つことの説明が必要である。

(2) 商の形の関数への対応

関数が商の形で表わされている関数の微分に関しては、高校における数学教育の中で十分に身についている学生は別として、短大で初めて学ぶ、あるいは高校において学んでいても十分に身についていない学生にとっては、非常にわかりにくい、あるいは適用しにくい公式のようである。従って、

（商の形）→（積の形）

$$\frac{x}{x^2+2}\ \rightarrow x\cdot(x^2+2)^{-1}$$

という変換を行なった後に微分するよう指導する。このようにすれば積の微分の公式と商の微分の公式の２つを理解しなくても、簡単な積の微分の公式１つの理解で足りる。

(3) 合成関数の微分法に対する対応

合成関数の微分法の考え方は相当に難しいものがあり、容易に理解することは困難であるものと思われる。しかしながらその手順１つをとってみても学生には理解しがたいものがあるようである。その最大の原因は、高校の教科書あるいは微分に関する多くの書物において、微分の対象となる関数がほとんどの場合 x の関数として扱われ、” x で微分する” ということに慣らされているためと考えられる。そこで合成関数の微分法の考え方あるいは微分の仕方を理解する一助として、

・x の関数 x^2 を x で微分する
・y の関数 y^2 を y で微分する
・x の関数 y^2 を x で微分する

といった、いろんな変数の関数を微分すること、あるいは微分できることを理解させることがまず第一歩であるものと考えられる。

2　効果

具体的対応策を考慮しながら実施した教育訓練（1991年度、1992年度）の効果を教育訓練終了時に実施した同一内容のテストの結果を用いて、分散分析[(5)]により分析・検討した。その結果、入学時における学生の学力の差については、1990年度生に比較して1991、1992年度生の方が低いとする有意差（危険率 5%）が認められたが、教育訓練終了時のテスト結果を用いた分析では、1991、1992年度生についても1990年度生と変わらないとする結果が得られた（有意差は認められないが1990年度生を上回る傾向にある）。従って上記の具体的対応策は効果があるものと認められる。

V　まとめ

基礎学力のバラツキが大きい学生を対象として、限られた時間内においてより効果的な教育訓練を実施するために、微分法の場合を例にとり統計的手法を用いて検討を行なった。その結果次のことが明かとなった。

(1) 指導者が考える難しさと学生の理解上の難しさが必ずしも一致していない。従って教育訓練を行なうにあたっては指導者はこのギャップの存在を明確に認識する必要がある。

(2) 学生が理解できないのはただ単一の要因によるものではなく、複数の要因が複雑に絡み合った結果である。そこで、本研究で示したような統計的手法を用いれば具体的にその要因を見つけることができる。

(3) 統計的手法を用いて分析を行なった結果明らかに

なった問題点に関して、具体的に３点の対応策を提示した。またこれらの対応策を考慮して２年度にわたって教育訓練を実施した結果、明かな効果が認められた。

最後に、アンケート調査にご協力をいただいた各短期大学校の先生方に感謝の意を表します。

［参考文献］

(1) 日科技連官能検査委員会編：新版官能検査ハンドブック，日科技連，p.349，1990年
(2) 同上　p.471
(3) 道脇義正他：工科のための微積分入門，東京図書，1985年
(4) 林知己夫：数量化理論とデータ処理，朝倉書店，1990年
(5) 岸根卓朗：理論応用統計学，養賢堂，p.440-461，1975年