

# 振りを受ける外周環状あるいは円形き裂を有する横等方性円柱

元新潟職業訓練短期大学校 秋山 孝夫\*  
 新潟職業能力開発短期大学校 渡辺 寛厚

Torsion Problems of a Transversely Isotropic Cylinder with a Externally Circumferential or a Circular Crack

Takao AKIYAMA, Hiroatsu WATANABE

**要約** 外周環状あるいは円形き裂を有する横等方性円柱を振る問題を三次元弾性論に基づいて厳密に解析した。未知関数と円柱調和型関数の積の積分形で表示される応力関数を仮定し、境界条件を満足させることにより本問題を連立級数方程式の解法問題に帰着した。さらに、き裂を含む面におけるせん断応力を未知係数を用いた級数形で表示することにより、この級数方程式を無限連立一次方程式に変換した。連立一次方程式を数値的に解き、得られた係数を用いてパラメータ変化に対応する変位や応力分布、応力拡大係数を詳細に数値計算した。き裂近傍における変位や応力分布は材料異方性の影響を強く受けること、き裂が深くなる程き裂縁近傍における応力場は強くなることわかった。併せて、三次元光弾性実験を行って応力拡大係数を測定した。その結果、弾性論に基づいて得られた応力拡大係数値と光弾性実験によって求められたそれとは十分に一致することが確認された。

## I 緒言

FRP、FRM等の繊維強化複合材料<sup>(1)</sup>は、単位重量あたりの強度および剛性が高く、腐食しにくい等の優れた機能性を有するため、一般金属材料とともに機械や構造物の構造材として広く利用されている。中でも一方向性繊維強化材は、巨視的観点から横等方性弾性体(円柱座標 $(r, \theta, z)$ を用いて弾性体内の各点を表示すれば、 $z$ 軸を弾性対称軸、 $r\theta$ 面を等方性面とする弾性体)と見なして取り扱うことができる。

他方、各種回転軸の強度設計に関連してき裂を有する円柱に振りが作用する場合の弾性解は基本的ではあるが、工学的に重要である。この種の研究例では等方性円柱を扱ったもの<sup>(2)~(6)</sup>が多く、円柱が横等方性弾性体の場合の解析例<sup>(6)</sup>は極めて少ない。

ところで、著者らの一人が所属する短大施設では、有限要素法を中心としたCAE教育システムが活用されているが、実習者は数値計算誤差を考慮せずに解析

結果をそのまま受入れてしまいがちである。指導に当たっては、有限要素解を既に得られている基本的な理論解と比較検討させることも大切と思われる。このように、弾性力学に基づいた厳密解を求める研究は、工学上のみならず実践教育現場においても重要である。

そこで、本研究では外周環状あるいは円形き裂を有する一方向繊維強化材等を想定した横等方性無限円柱にトルクが作用する問題を解析し、変位や応力分布、応力拡大係数を明示するとともにこれら及ぼすき裂深さと材料異方性の影響を明らかにした。さらに、接着法<sup>(7)</sup>と応力凍結法<sup>(8)</sup>を組み合わせた三次元光弾性実験を行い、弾性解と比較検討した。

## II 応力解析

### 1 応力関数

円柱座標 $(r, \theta, z)$ における変位成分と応力成分をそれぞれ $(u_r, v_\theta, w_z)$ ,  $(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}, \tau_{r\theta})$ とすれば、 $r\theta$ 面を等方性弾性面、 $z$ 軸を異方性主軸方向とする軸対称

振りが作用する横等方性弾性体の基礎方程式の解は、調和型応力関数  $\phi_3$  を用いて次のように表示できる<sup>(9)</sup>。

$$\begin{aligned} v_\theta &= -\partial\phi_3/\partial r, \quad u_r = w_z = 0 \\ \tau_{\theta z} &= G'\partial^2\phi_3/(\partial r\partial z) \\ \tau_{r\theta} &= G'\partial^2\phi_3/\partial z^2 + 2G\partial\phi_3/(r\partial r) \\ \sigma_r &= \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $G, G'$  はそれぞれ  $r\theta$  面および  $z$  軸に関する横弾性係数であり、これらの間には次のような関係がある。

$$\begin{aligned} \{\partial^2/\partial r^2 + \partial/(r\partial r) + \partial^2/\partial z_3^2\}\phi_3 &= 0 \\ z_3 &= \mu_3^{-1/2}z, \quad \mu_3 = G'/G \end{aligned} \quad (2)$$

## 2 解析方法

### ① 外周環状き裂を有する横等方性円柱

図1に示すように、半径  $r_c$  の外周環状き裂を有する半径  $r_o$  の横等方性無限円柱を無限遠方でトルク  $T$  で振る場合を解析する。ここで、円柱材料の異方性主軸方向は  $z$  軸方向とする。き裂を含む面に関して応力場は対称性を有することから、本問題は  $z \geq 0$  の領域のみを考慮すれば十分であり、この場合の境界条件は次のようになる。

- (i)  $(v_\theta)_{z=0} = 0, (0 \leq r \leq r_c)$
- (ii)  $(\tau_{\theta z})_{z=0} = 0, (r_c < r \leq r_o)$
- (iii)  $(\tau_{r\theta})_{r=r_o} = 0, (0 \leq z < \infty)$
- (iv)  $z \rightarrow \infty$  でトルクが  $T$

円柱の無限遠における応力場は、き裂が無い横等方性円柱を振る場合の解に一致することを考慮し、 $\phi_3$  を次のように選ぶ。

$$\phi_3 = A_o(r^2 - 2z_3^2) + B_o z_3(2z_3^2 - 3r^2)$$

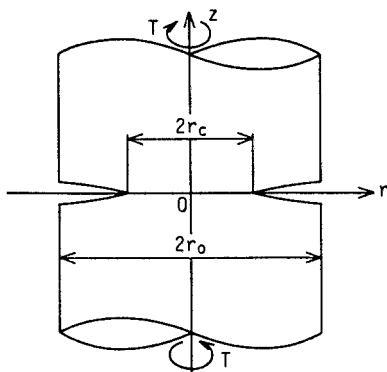


図1. 振りを受ける外周環状き裂を有する横等方性円柱

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_o(\xi_m r) \exp(-\xi_m z_3) \quad (4)$$

ここで、 $J_n(x)$  は  $n$  次の第一種ベッセル関数、 $A_m (m = 0, 1, \dots)$ 、 $B_o$  は境界条件より定められる未知係数である。

式(1)と(4)を用いれば、変位と応力は次のように表示できる。

$$\begin{aligned} v_\theta &= -2A_o r + 6B_o r z_3 + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m A_m J_1(\xi_m r) \exp(-\xi_m z_3) \\ \tau_{\theta z} &= 6(GG')^{1/2} B_o r - (GG')^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 A_m J_1(\xi_m r) \\ &\quad \times \exp(-\xi_m z_3) \\ \tau_{r\theta} &= -G \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 A_m J_2(\xi_m r) \exp(-\xi_m z_3) \end{aligned} \quad (5)$$

境界条件(iii)は  $z \geq 0$  に対して常に成立することから  $\xi_m (m = 1, 2, \dots)$  は

$$J_2(\xi_m r_o) = 0 \quad (6)$$

を満足する正根 ( $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots$ ) として与えられる。また、境界条件(iv)を用いれば、

$$T = 2\pi \int_0^{r_o} r^2 (\tau_{\theta z})_{z=\infty} dr = 3\pi(GG')^{1/2} B_o r_o^4 \quad (7)$$

であるから  $B_o$  は次のようになる。

$$B_o = T / \{3\pi(GG')^{1/2} r_o^4\} \quad (8)$$

式(8)を考慮するとともに、式(5)に境界条件(i)、(ii)を適用すれば、次式を得る。

$$(v_\theta)_{z=0} = -2A_o r + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m A_m J_1(\xi_m r) = 0, (0 \leq r \leq r_c) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (\tau_{\theta z})_{z=0} &= 2Tr/(\pi r_o^4) - (GG')^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 A_m J_1(\xi_m r) \\ &= 0, (r_c < r \leq r_o) \end{aligned} \quad (10)$$

従って、本問題は連立級数方程式(9)、(10)を満足する  $A_m$  を決定する問題になる。式(9)、(10)を解くための方法は種々考えられるが、精度良く比較的簡単に解を求めるために、 $(\tau_{\theta z})_{z=0} (0 \leq r < r_c)$  を級数展開することにより解析を行なう。

Sih<sup>(10)</sup>、Kumar<sup>(11)</sup>の解析結果を参考にすれば、 $(\tau_{\theta z})_{z=0}$  はき裂先端 ( $r \rightarrow r_c^-$ ) において  $(r_c^2 - r^2)^{-1/2}$  の特異性を有し、 $0 \leq r < r_c$  では有限かつ連続な関数であると考えられる。そこで、 $(\tau_{\theta z})_{z=0}$  は未知係数  $a_n$  を用いて一般性を失うことなく次のように級数表示できる。

$$\begin{aligned} (\tau_{\theta z})_{z=0} &= \frac{1}{(r_c^2 - r^2)^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n T_{2n+1}(r/r_c) \\ &\quad \times H(r_c - r), (0 \leq r \leq r_o) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $T_n(x)$  は第一種チェビシェフ多項式、 $H(x)$  はヘビサイドのステップ関数である。式(10)と(11)より次の関係式を得る。

$$2Tr/(\pi r_o^4) - (GG')^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 A_m J_1(\xi_m r)$$

$$= \frac{1}{(r_c^2 - r^2)^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n T_{2n+1}(r/r_c) H(r_c - r),$$

$$(0 \leq r \leq r_o) \quad (12)$$

$\xi_m$ が式(6)の正根であることを考慮して式(12)の右辺を  $0 \leq r \leq r_o$  でベッセル展開し、左辺の係数と等置すれば、次式を得る。

$$T = 4\pi r_c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \quad (13)$$

$$A_m = \frac{r_c^2}{2(GG')^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P(n, m) \quad (14)$$

ここで、

$$P(n, m) = \frac{j_n(z_m) n_{n-1}(z_m) - j_{n+1}(z_m) n_n(z_m)}{\xi_m r_o^2 J_1(\xi_m r_o)}$$

$$z_m = \xi_m r_c / 2 \quad (15)$$

式(14)は任意の  $\alpha_n$  に対して  $(\tau_{\theta z})_{z=0}$  の境界条件を満足することから  $\alpha_n$  を決定するために残りの式(9)を用いる。 $r$  と  $J_1(\xi_m r)$  を  $0 \leq r \leq r_c$  でチェビシェフ多項式により展開すれば、

$$r = r_c T_1(r/r_c),$$

$$J_1(\xi_m r) = 2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p J_p(z_m) J_{p+1}(z_m) T_{2p+1}(r/r_c),$$

$$(0 \leq r \leq r_c) \quad (16)$$

となり、これを式(9)に代入すれば、次式を得る。

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p T_{2p+1}(r/r_c) \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m A_m J_p(z_m) J_{p+1}(z_m)$$

$$= A_o r_c T_1(r/r_c), \quad (0 \leq r \leq r_c) \quad (17)$$

式(17)は  $r$  の領域で任意の  $r$  に対して成立することから両辺の  $T_{2p+1}(x)$  に関する係数を等置すれば、次式を得る。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \xi_m A_m J_p(z_m) J_{p+1}(z_m) = A_o r_c \delta_{op}, \quad (p=0, 1, 2, \dots) \quad (18)$$

ここで、 $\delta_{ij}$  はクロネッカ・デルタである。さらに、式(18)において  $p$  番目と  $(p+1)$  番目を順次加え合わせれば、次のようになる。

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m J_{p+1}^2(z_m) = A_o r_c^2 \delta_{op} / 4, \quad (p=0, 1, 2, \dots) \quad (19)$$

式(14)を式(19)に代入して総和の順序を交換すれば、次のような  $\alpha_n$  に関する無限連立一次方程式を得る。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n E(n, p) = A_o (GG')^{1/2} \delta_{op}, \quad (p=0, 1, 2, \dots) \quad (20)$$

ここで、

$$E(n, p) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{p+1}^2(z_m) P(n, m) \quad (21)$$

式(20)を解いて  $\alpha_n / \{A_o (GG')^{1/2}\}$  を決定すれば、式(13)、(14)より  $A_o$  および  $A_m$  が求められる。これらを式(5)に代入すれば、全ての変位と応力が求められる。

き裂先端での特異応力場を評価するために無次元化

されたモードIIIの応力拡大係数  $K_{III, \infty}^E$  を次式

$$K_{III, \infty}^E = \lim_{r \rightarrow r_c - 0} \{2(r_c - r)/r_o\}^{1/2} (\tau_{\theta z})_{z=0} / \tau_{\infty} \quad (22)$$

で定義する。ここで、 $\tau_{\infty}$  はき裂の無い円柱を振る場合の公称応力であり、

$$\tau_{\infty} = 2T/(\pi r_o^3) \quad (23)$$

式(11)より  $K_{III, \infty}^E$  は次のように求められる。

$$K_{III, \infty}^E = \frac{1}{\tau_{\infty} (r_o r_c)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \alpha_n \quad (24)$$

式(13)、(24)よりトルク  $T$  が一定ならば、 $K_{III, \infty}^E$  は  $\mu_3$  に無関係になることがわかる。

なお、本問題において  $G = G' (\mu_3 = 1)$  の場合の結果は等方性円柱の場合(4)に一致する。

## ② 円形き裂を有する横等方性円柱

次に、図2に示すように、半径  $r_c$  の円形き裂を有する半径  $r_o$  の横等方性無限円柱をトルク  $T$  で振る場合を解析する。円柱材料の異方性主軸方向を  $z$  軸方向とする。き裂を含む面に関して応力場は対称であることから、本問題の境界条件は次のようになる。

- (i)  $(v_{\theta})_{z=0} = 0, \quad (r_c \leq r \leq r_o)$
- (ii)  $(\tau_{\theta z})_{z=0} = 0, \quad (0 \leq r < r_c)$
- (iii)  $(\tau_{r\theta})_{r=r_o} = 0, \quad (0 \leq z < \infty)$
- (iv)  $z \rightarrow \infty$  でトルクが  $T$

前節と同様に、応力関数  $\phi_3$  を次のように選ぶ。

$$\phi_3 = C_o (r^2 - 2z_3^2) + D_o z_3 (2z_3^2 - 3r^2)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_o(\xi_m r) \exp(-\xi_m z_3) \quad (26)$$

ここで、 $C_m (m=0, 1, \dots)$ 、 $D_o$  はそれぞれ未知係数である。

式(1)、(26)による変位と応力は次のように表示できる。

$$v_{\theta} = -2C_o r + 6D_o r z_3 + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m C_m J_1(\xi_m r) \exp(-\xi_m z_3)$$

$$\tau_{\theta z} = 6(GG')^{1/2} D_o r - (GG')^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 C_m J_1(\xi_m r)$$

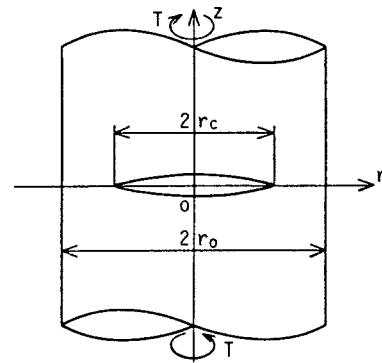


図2. 振りを受ける円形き裂を有する横等方性円柱

$$\begin{aligned} & \times \exp(-\xi_m z_3) \\ \tau_{r\theta} = & -G \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 C_m J_2(\xi_m r) \exp(-\xi_m z_3) \end{aligned} \quad (27)$$

境界条件(iii)が成立するためには $\xi_m (m=1, 2, \dots)$ は  
 $J_2(\xi_m r_0) = 0$  (28)  
 を満足する正根( $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots$ )でなければならない。  
 また、境界条件(iv)より $D_0$ は次のようになる。

$$D_0 = \frac{T}{3\pi(GG')^{1/2} r_0^4} \quad (29)$$

式(29)を考慮するとともに式(27)に境界条件(i), (ii)を適用すれば、次式を得る。

$$(\tau_{\theta})_{z=0} = -2C_0 r + \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m C_m J_1(\xi_m r) = 0, \quad (r_c \leq r \leq r_0) \quad (30)$$

$$(\tau_{\theta z})_{z=0} = \frac{2T}{\pi r_0^4} r - (GG')^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 C_m J_1(\xi_m r) = 0, \quad (0 \leq r < r_c) \quad (31)$$

従って、本問題は級数方程式(30), (31)を満足する $C_m$ を決定する問題になる。前節と同様に、 $(\tau_{\theta z})_{z=0} (r_c < r \leq r_0)$ を適当な級数で展開することにより解析を行なう。

いま、変域  $r_c \leq r \leq r_0$  において  
 $b = (r_0 + r_c)/2, \quad w = (r_0 - r_c)/2$   
 $r^2 = b^2 + w^2 - 2bw \cos(\phi - \pi)$  (32)

と置いて変数  $r$  を変数  $\phi$  に変換すれば、 $r_c \leq r \leq r_0$  は  $0 \leq \phi \leq \pi$  ( $r = r_c$  で  $\phi = \pi$ ,  $r = r_0$  で  $\phi = 0$ ) に対応する。  
 $(\tau_{\theta z})_{z=0}$  はき裂先端 ( $r \rightarrow r_c +$ ) において  $(r^2 - r_c^2)^{-1/2}$  の特異性を有し、 $r_c < r \leq r_0$  では有限かつ連続であると考えられるから未知係数  $\beta_n$  を用いて次のように級数表示できる。

$$(\tau_{\theta z})_{z=0} = \frac{r}{(r^2 - r_c^2)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cos n\phi H(r - r_c), \quad (0 \leq r \leq r_0) \quad (33)$$

式(31)と式(33)より次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{2T}{\pi r_0^4} r - (GG')^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^2 C_m J_1(\xi_m r) \\ & = \frac{r}{(r^2 - r_c^2)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cos n\phi H(r - r_c), \end{aligned} \quad (0 \leq r \leq r_0) \quad (34)$$

$\xi_m$  が式(28)の正根であることを考慮して式(34)の右辺を  $0 \leq r \leq r_0$  でベッセル展開し、左辺の係数と等置すれば次式を得る。

$$T = -4\pi(bw)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{4n^2 - 1} \left\{ b^2 + w^2 + \frac{2bw(4n^2 + 3)}{4n^2 - 9} \right\} \quad (35)$$

$$C_m = 2 \left( \frac{bw}{GG'} \right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n Q(n, m) \quad (36)$$

ここで、

$$\begin{aligned} Q(n, m) &= \frac{1}{\{\xi_m r_0 J_1(\xi_m r_0)\}^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2 - \delta_{0k}) \\ g_k(\xi_m) &= 2kJ_k(\xi_m w) J_k(\xi_m b) / \xi_m \\ & - w J_{k+1}(\xi_m w) J_k(\xi_m b) - b J_k(\xi_m w) J_{k+1}(\xi_m b) \\ L(n, k) &= \frac{2n+1}{(2n+1)^2 - 4k^2} - \frac{2n-1}{(2n-1)^2 - 4k^2} \end{aligned} \quad (37)$$

式(37)は任意の  $\beta_n$  に対して  $(\tau_{\theta z})_{z=0}$  の境界条件を常に満足することから  $\beta_n$  を決定するために式(30)を用いる。 $X_p(\xi_m) = J_p(\xi_m w) J_p(\xi_m b)$  と置いてゲーゲンバウアーの加法定理<sup>(12)</sup>

$$\begin{aligned} J_1(\xi_m r) &= \frac{2r}{\xi_m b w \sin \phi} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (p+1) X_{p+1}(\xi_m) \\ & \times \sin(p+1)\phi, \quad (r_c \leq r \leq r_0) \end{aligned} \quad (38)$$

を式(30)に代入すれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (p+1) X_{p+1}(\xi_m) \sin(p+1)\phi \\ & = C_0 b w \sin \phi, \quad (r_c \leq r \leq r_0) \end{aligned} \quad (39)$$

式(39)は  $r$  の領域で任意の  $r$  に対して成立することから、両辺の  $\sin(p+1)\phi$  に関する係数を等置することにより次式を得る。

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m X_{p+1}(\xi_m) = C_0 b w \delta_{0p}, \quad (p=0, 1, 2, \dots) \quad (40)$$

式(40)に式(36)を代入して総和の順序を交換すれば、次のような  $\beta_n, C_0$  に関する無限連立一次方程式を得る。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n F(n, p) = C_0 (GG')^{1/2} \delta_{0p}, \quad (p=0, 1, 2, \dots) \quad (41)$$

ここで、

$$F(n, p) = \frac{2}{(bw)^{1/2}} \sum_{m=1}^{\infty} X_{p+1}(\xi_m) Q(n, m) \quad (42)$$

式(41)を解いて  $\beta_n / \{C_0 (GG')^{1/2}\}$  を決定すれば、式(35), (36)より  $C_0$  および  $C_m$  が求められる。これらを式(27)に代入すれば、全ての変位と応力が求められる。

本問題はモードIIIの変形状態であり、無次元化された応力拡大係数  $K_{III, \infty}^c$  を次式のように定義する。

$$K_{III, \infty}^c = \lim_{r \rightarrow r_c + 0} \{2(r - r_c) / r_0\}^{1/2} (\tau_{\theta z})_{z=0} / \tau_{\infty} \quad (43)$$

式(33)より式(43)は次のように求められる。

$$K_{III, \infty}^c = \frac{1}{\tau_{\infty} (r_0 r_c)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_n \quad (44)$$

式(35), (44)よりトルク  $T$  が一定ならば、 $K_{III, \infty}^c$  は  $\mu_3$  に無関係になることがわかる。

なお、本問題において  $\mu_3 = 1$  の結果は等方性の場合の結果に対応する。

### III 数値結果

式(20)および(41)においてそれぞれ有限項で打ち切って解いた場合、いずれの  $r_c / r_0$  に対しても  $\alpha_n / \{A_0 (GG')^{1/2}\}$  と  $\beta_n / \{C_0 (GG')^{1/2}\}$  の収束性は良好であり、き裂が浅

くなる程収束がやや遅くなる傾向がある。例えば、き裂が外周環状き裂の場合で  $r_c/r_0=0.9$  ならば10項とすれば、円形き裂の場合で  $r_c/r_0=0.1$  ならば30項用いれば、応力拡大係数や応力値は十分に収束することを確認した。以下の結果で論ずるいずれの変位と応力は  $r_0 \tau_\infty/G$  および  $\tau_\infty$  でそれぞれ除して得られる無次元量であり、“\*”を付して表示した。

図3～6は  $\mu_3=0.5, 1, 2$  として  $r_c/r_0=0.5$  の場合の  $v_\theta^*$ ,  $\tau_{\theta z}^*$  および  $\tau_{r\theta}^*$  の分布図であり、図3、4はき裂が外周環状き裂の場合、図5、6は円形き裂の場合に対する分布図である。図3、5では、き裂が無い場合との差異を明示するために  $v_\theta^0$  を差し引いた無次元量  $v_\theta^*$  を示した。図3と5より、き裂形状が外周環状および円形のいずれの場合においても  $0 < r < r_c, 0 \leq z/r_0 \leq 0.1$  では  $(v_\theta)_{\mu_3=0.5} > (v_\theta)_{\mu_3=1} > (v_\theta)_{\mu_3=2}$  となる。また、いずれの  $\mu_3$  に対しても  $z/r_0$  が増加してき裂面から遠ざかるにつれて各  $v_\theta^*$  は滑らかな分布曲線となる。 $z/r_0 \geq 2$  では  $v_\theta - v_\theta^0 = -2A_0 r (A_0 < 0)$  となり、き裂が無い場合に較べて両  $v_\theta$  は共に  $-2A_0 r$  だけ増加する。一方、図4と6より外周環状き裂および円形き裂のいずれの場合においても  $z=0$  面での  $\tau_{\theta z}^*$  は  $\mu_3$  に無関係となる。また、 $0.01 \leq z/r_0 \leq 0.25, 0 < r < r_c$  では外周環状き裂の場合  $(\tau_{\theta z}^*)_{\mu_3=0.5} < (\tau_{\theta z}^*)_{\mu_3=1} < (\tau_{\theta z}^*)_{\mu_3=2}$  となり、円形き裂の場合には逆に  $(\tau_{\theta z}^*)_{\mu_3=0.5} > (\tau_{\theta z}^*)_{\mu_3=1} > (\tau_{\theta z}^*)_{\mu_3=2}$  となる。いずれの  $\mu_3$  に対しても  $z/r_0 \geq 1$  ならば、各  $\tau_{\theta z}^*$  はき裂が無い場合の結果  $\tau_{\theta z}^0 = 2Tr/(\pi r_0^4)$  にほぼ一致して  $\tau_{\theta z}^*$  に及ぼすき裂の影響はいずれも消失する。

図7と8はそれぞれ  $K_{III,\infty}^E, K_{III,\infty}^C$  の  $r_c/r_0$  による変化を示した図である。 $K_{III,\infty}^E, K_{III,\infty}^C$  はともに  $\mu_3$  に無関係であり、いずれの  $\mu_3$  に対してもき裂深さが増加する

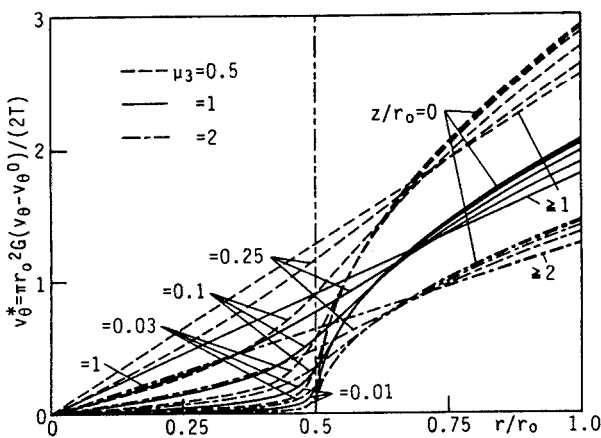


図3.  $v_\theta^*$  の分布 ( $r_c/r_0=0.5$ , 外周環状き裂の場合)

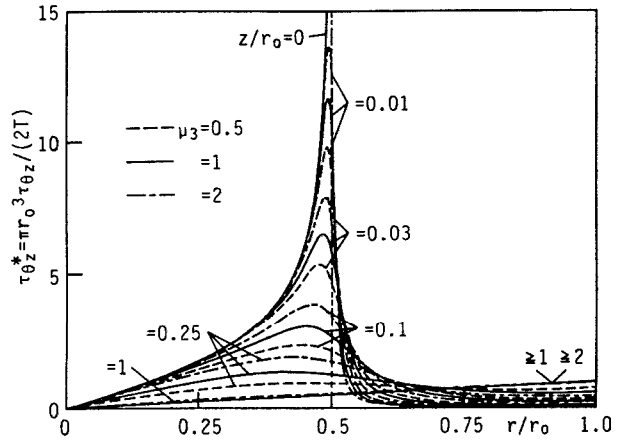


図4.  $\tau_{\theta z}^*$  の分布 ( $r_c/r_0=0.5$ , 外周環状き裂の場合)

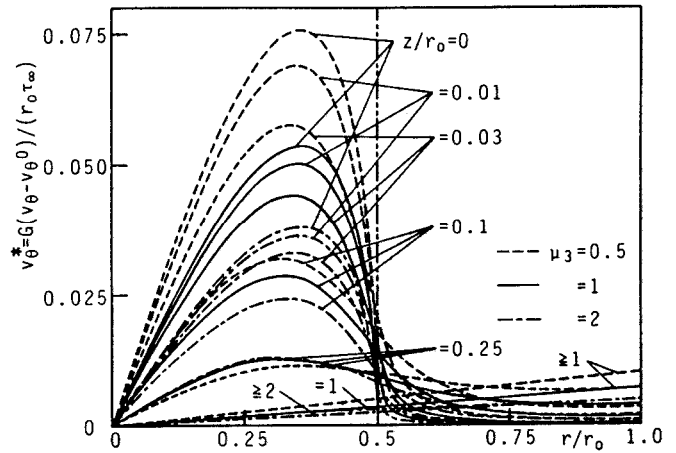


図5.  $v_\theta^*$  の分布 ( $r_c/r_0=0.5$ , 円形き裂の場合)

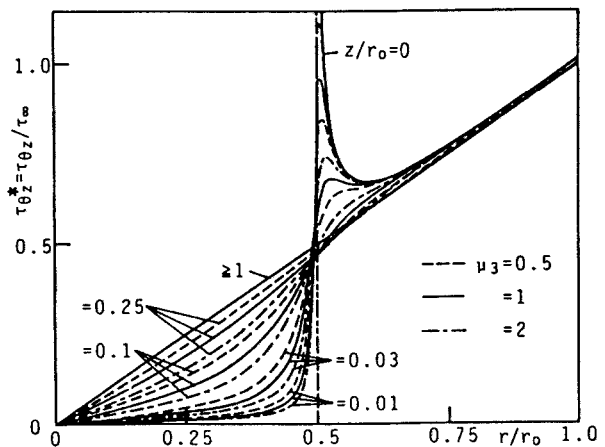


図6.  $\tau_{\theta z}^*$  の分布 ( $r_c/r_0=0.5$ , 円形き裂の場合)

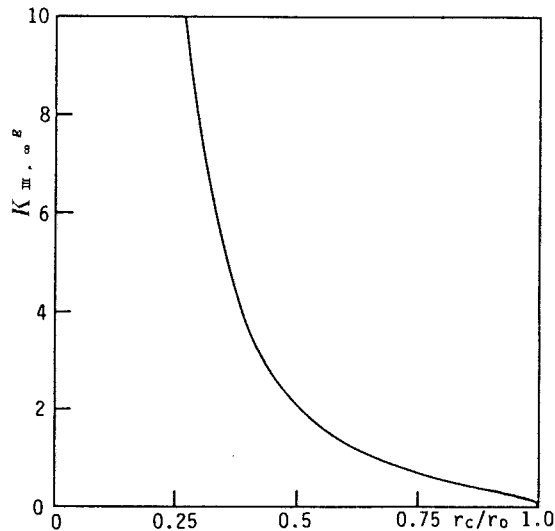


図7.  $K_{III,∞}^E$ の  $r_c/r_0$ による変化

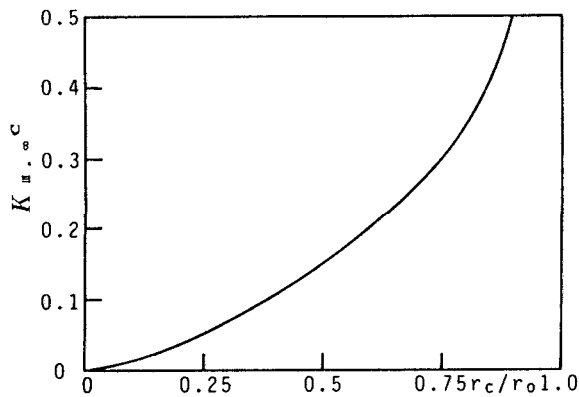


図8.  $K_{III,∞}^C$ の  $r_c/r_0$ による変化

とともに急激に大きくなる。すなわち、き裂形状が外周環状および円形のいずれの場合でもき裂が深くなる程き裂縁近傍の応力場は強くなることわかる。

#### IV 光弾性実験

##### 1 実験方法

本実験では、応力凍結光弾性実験用材料として一般に広く用いられているアラルダイトBと硬化材HT901を重量比10：3で混合したものをを用いた。この混合物を型に込めて試作した恒温槽に入れ、図9に示す温度コントロールに基づいて重合反応させることによりエポキシブロックを作った。き裂部を製作するために、機械加工を施したエポキシブロックを半分の長さに切断し、き裂面に相当する部分に厚さ50 $\mu$ mのテフロンシートを挟んでエポキシ系接着材で接着した<sup>(7)</sup>。実験用モデルの大きさは、弾性解析から得られた

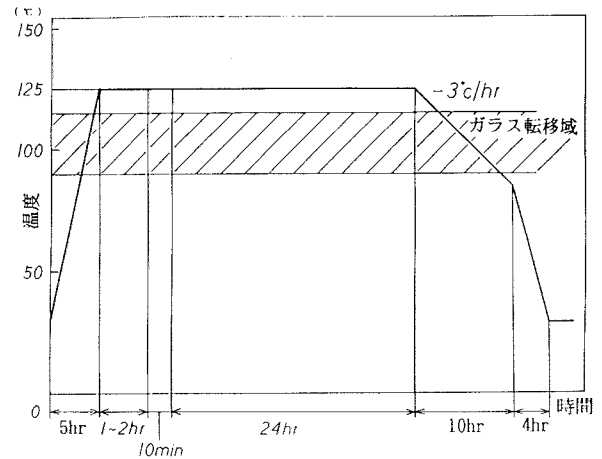


図9. 重合温度サイクル

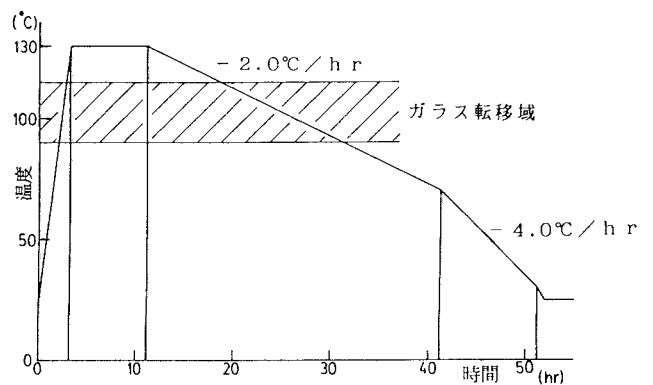
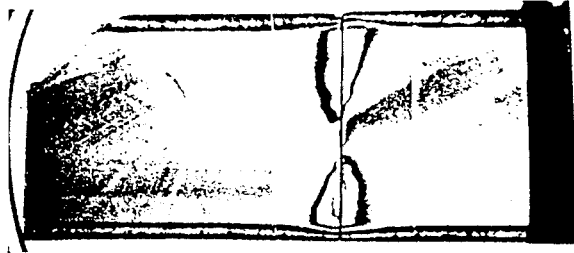


図10. 応力凍結サイクル

知見、すなわちき裂面より外半径( $r_0$ )程度以上離れた所では応力場に及ぼすき裂の影響が無視できることを考慮し、外径( $2r_0$ )40mm、長さ100mmで、き裂半径の大きさ( $r_c$ )を10mm(外周環状き裂)および16mm(円形き裂)とした。製作した実験モデルを恒温槽の中に設置し、一定トルクを加えた状態で図10に示す温度サイクルにより応力凍結<sup>(8)</sup>を行った。次に、応力凍結されたモデルをき裂縁を含むようにき裂面に垂直にスライスして厚さ1.5mm程度の試験片を製作した。そして、試作した等色線縞次数増倍装置<sup>(7)</sup>を利用することによりこの試験片の透過等色線縞を明瞭に観察した。図11に等色線縞の例を示す。

いま、等色線縞次数を  $N$ 、光弾性感度を  $\alpha$ 、試験片厚さを  $d$ 、等色線縞のき裂縁からの距離を  $r$  とすれば、主応力差と  $N$  の関係から  $K_{III,∞}^E$  と  $K_{III,∞}^C$  は次式により求められる<sup>(13)</sup>。

$$K_{III,∞}^E, K_{III,∞}^C = \frac{2N}{ad\alpha} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{1/2} \quad (45)$$



外周環状き裂 ( $r_c/r_o=0.8$ )



円形き裂 ( $r_c/r_o=0.5$ )

図11. 光弾性縞写真

## 2 実験結果

表1は弾性解析および光弾性解析より得られた二つの  $K_{III, \infty}^E$ ,  $K_{III, \infty}^C$  を比較した表である。両者は10%未満の差異で一致し、弾性解と光弾性解が共に妥当であることが示された。よって、本研究で得られた結果は、有限要素法等によって得られた数値解のチェックに有用であると考えられる。

## V 結 言

表1.  $K_{III, \infty}^E$ ,  $K_{III, \infty}^C$  の弾性解と光弾性解の比較

	弾性解	光弾性解	差異(%)
$K_{III, \infty}^E$ ( $r_c/r_o=0.5$ )	2.10	2.21	5.1
$K_{III, \infty}^C$ ( $r_c/r_o=0.8$ )	0.349	0.357	2.3

外周環状あるいは円形き裂を有する横等方性無限円柱を振る問題を三次元弾性論に基づいて解析し、き裂近傍における変位や応力分布および応力拡大係数を明示し、これらに及ぼす材料異方性やき裂深さの影響を調べた。さらに、三次元光弾性実験を行って応力拡大係数値を求め、弾性解析より得られた係数値と比較検

討した。その結果を要約すると次のようになる。

- (1) き裂形状が外周環状、円形のいずれの場合でも一定トルクに対するき裂近傍の  $v_\theta$  および  $\tau_{\theta z}$  の半径方向分布は、材料異方性の影響を強く受ける。
- (2) 外周環状または円形き裂のいずれの場合においても、き裂が深くなるとともに応力拡大係数  $K_{III, \infty}^E$ ,  $K_{III, \infty}^C$  は共に急激に増大し、き裂縁近傍におけるせん断応力場は強くなる。
- (3) 弾性解析および光弾性実験より得られた  $K_{III, \infty}^E$ ,  $K_{III, \infty}^C$  は十分に一致し、両解析の妥当性が確認された。

## 参考文献

- (1) 日本機械学会編：先端複合材料、技報堂出版、1990年5月、p 223。
- (2) Yamamoto, Y. and Sumi, Y.: Stress intensity factors of a twisted roundbar with a circumferential crack, Int. J. Fract. Vol. 10, 1974, p. 269.
- (3) Hasebe, N. and Kuse, K.: Torsion of a cylindrical bar with ring-shaped edge crack by the mapping function and the finite difference method, Theo. Appl. Mech. Vol. 27, 1977, p. 37.
- (4) 奥屋、渋谷、小泉：外周き裂を有する無限円柱のねじり、日本機械学会論文集、44巻388号、1978年、p. 4052。
- (5) 内山、土田、中原、小玉：偏平回転円体状空かあるいは円形き裂を有する円柱のねじり、日本機械学会論文集、47巻422号、1981年、p. 1012。
- (6) Zhang, X. S.: The general solution of a finite cylinder with a concentric penny-shaped crack under torsion, Eng. Fract. Mech. Vol. 31, No. 5, 1988, p. 827.
- (7) 渡辺、久田、平野、北川：三次元き裂問題の光弾性実験による解析（第1報、精度良い解を得るための実験、解析手法の開発と三次元き裂解析）、日本機械学会論文集、44巻、388号、1978年、p. 4040。
- (8) 辻、西田、河田：光弾性実験法、日刊工業新聞社、1965。
- (9) Chen, W. T.: J. Appl. Mech. Vol. 37, 1970, p85.
- (10) Sih, G. C.: Mechanics of Fracture, 2, Noordhoff, 1975, p. 7.
- (11) Kumar, M.: J. Math. Phys. Sci. Vol. 14, No. 6, 1980, p. 619.
- (12) 森口、宇田川、一松：数学公式(III)、岩波書店、1963年、p. 218。
- (13) 吉岡、宮崎、渡辺、北川、平野：IIIモードき裂の

光弾性実験による解析(解析法の予備的検討)、日本機械学会講演論文集、No.800-10、1980年、p.90。