〈研究ノート〉

最適設計のための非線形計画法ライブラリの開発

―その1　逐次線形計画法―

北海道職業能力開発短期大学校　　寺　島　周　平

Development of a Nonlinear Programming Library for Design Optimization
—First Report : Sequential Linear Programming—

Shuhei TERASHIMA

要約　構造最適化に用いられる非線形計画法アルゴリズムの中でもっとも一般的な手法が逐次線形計画法（Sequential Linear Programming, SLP）である。SLPは線形近似による誤差はあるものの、一次元探索を必要としないため、Lagrange乗数法やペナルティ関数法に比べて、現実的な時間内に最適解を得ることができる。またSLPは簡単にプログラムを作成できるために、様々な工学の意志決定問題や構造最適化問題のツールとして広く用いられている。最適設計システム開発の一環として、変数変換と縮小タブローによるシンプレックス法を組み合わせて、計算効率と収束性を向上させた改良型のSLPを開発したのでその概要を報告する。最初にSLPアルゴリズムについてその知識を整理し、代表的な数値計算例を示す。

I　まえがき

オペレーションズリサーチの分野において、現在までに多くの最適化の数値計算アルゴリズムが開発されている。例えば、特殊な構成の最適化問題を取り扱うために、線形計画法や2次計画法、動的計画法などのアルゴリズムが実用化されている。

設計の最適化問題の多くは非線形計画問題として定式化することができる。この分野ではこれまで、ペナルティ関数法やラグランジュ乗数法のような制約条件のない最適化問題に変換して取り扱うことが多かった。多くの変換法のアルゴリズムは目的関数や制約関数の導関数を再計算しながら一次元探索を行う。そのため一次元探索の過程において、有限要素法などによる感度解析を繰り返す必要があり、現実の問題への適用が困難であった。一方、制約条件を直接設計空間における制約面として用いる手法として直接法がある。SLPは直接法の基本的な解法の一つであり、一次元探索を必要としない。しかも入力データの準備が簡単で、その解法に精通していない使用者でもブラックボックスとして必要な計算結果を容易に得ることができる。

SLPでは前段階における近似問題に対する解をもとにして、現在の設計点に関する新しい線形化問題を構成するプロセスを正確な解を得るまで繰り返す。したがって、線形近似化問題における制約条件の総数を減少させることができれば計算効率を大幅に向上させることができる。本報告ではSLPを構成する制約条件の総数を減少させるための変数変換と縮小タブローを用いた改良アルゴリズムを提案し、数値計算例を示す。

II　基礎理論

1　改良型SLPの定式化

設計変数ベクトル$\mathbf{b}$の上下限を$\mathbf{b}^u$、$\mathbf{b}^l$、目的関数を$f(\mathbf{b})$、j番目の非線形制約条件を$g_j(\mathbf{b})$とすると、一般的な最適化問題の定式化は(1)～(3)式で与えられる。ここでは上下限制約条件式を非線形制約条件と区別する。非線形制約条件の総数をm個、設計変数の総数をn個とする。

$$\text{Minimize}\quad f(\mathbf{b}) \tag{1}$$

$$\text{Subject to}\quad g_j(\mathbf{b}) \leqq 0 \qquad j = 1, m \tag{2}$$

論文受付日　1995. 10. 16

$$b^l_i \leqq b_i \leqq b^u_i \quad i=1, n \tag{3}$$

設計問題の制約条件式は非線形となるため、(1)～(3)式は非線形最適化問題となる。目的関数と非線形制約条件式を現在の設計点 $\mathbf{b}_0$ のまわりで、一次の導関数の項までテイラー展開し、近似最適化問題を(4)～(6)式のように構成する。

$$\text{Minimize} \quad f(\mathbf{b}_0)+\nabla f(\mathbf{b}_0)\cdot\delta\mathbf{b} \tag{4}$$

$$\text{Subject to} \quad g_j(\mathbf{b}_0)+\nabla g_j(\mathbf{b}_0)\cdot\delta\mathbf{b}\leqq 0 \quad j=1, m \tag{5}$$

$$\mathbf{b}^l \leqq \mathbf{b} \leqq \mathbf{b}^u \tag{6}$$

ただし、

$$\delta\mathbf{b}=\mathbf{b}-\mathbf{b}_0 \tag{7}$$

下付き添字の0はこのテイラー級数展開を評価する設計点を明確にするために付加する。設計点 $\mathbf{b}_0$ における関数値とその勾配が一定であるから、(4)～(6)式は、設計変数ベクトルの変化分 $\delta\mathbf{b}$ について線形計画問題を構成することができる。原非線形問題は各改良段階でそのつど局所的に線形化されるので、この方法を用いて非凸問題の解を得ることもできる。

ここで、新たに(8)式のように変数変換を行う。

$$\mathbf{t}=\mathbf{b}-\mathbf{b}^l+\delta\mathbf{b} \tag{8}$$

上下限制約条件に適当なムーブリミット α を課して、線形近似問題(4)～(6)は変数 $\mathbf{t}$ を用いて(9)～(11)式のように構成することができる。

$$\text{Minimize} \quad \nabla f(\mathbf{b}_0)\cdot\mathbf{t} \tag{9}$$

$$\text{Subject to} \quad g_j(\mathbf{b}_0)+\nabla g_j(\mathbf{b}_0)\cdot\mathbf{t}\leqq\nabla g_j(\mathbf{b}_0)\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{b}^l)-g_j(\mathbf{b}_0) \tag{10}$$

$$\mathbf{t}\leqq\alpha(\mathbf{b}^u-\mathbf{b}^l) \tag{11}$$

小さい定数 ε に対して(12)式が成り立つとき、最適解が得られたものとして計算を終了する。

$$\max_i(|\delta b_i|/|b_i|)\leqq\varepsilon \tag{12}$$

SLPでは真の最適解が線形近似された許容領域の頂点と一致しない場合には、近似問題の解は許容領域の頂点間で振動する。また最適点の近傍でアクティブな制約条件の総数が設計変数の総数よりも少ない場合には、やはり解は収束しない。この問題を解決するために改良過程で常にムーブリミットを減少させる手法が用いられてきた。本プログラムでは解の振動が生じたときだけムーブリミットを減少させることにより、適切な精度で許容解あるいは許容解に近い中間解を得ることができる。

2　縮小タブローによるシンプレックス法

LP問題はその効率の良さと信頼性によって、逐次線形計画問題を解くためのサブルーチンとして使用される。近似問題のシンプレックスタブローを構成するとき、標準形を得るためにすべての制約条件にスラック変数を加えなければならない。この場合、スラック変数の係数は単位行列となる。非負の制約条件については人為変数を加えて初期基底解から出発して計算を進める必要がある。ある許容基底解からさらに改良された許容基底解へ移動するとき、基底へ組み入れる変数と基底から除く変数はつねに一対である。したがって実際のコンピュータインプリメンテーションでは、非基底変数に対する制約条件式の係数のみを整列させた縮小タブローを導入することができる。LP問題を解くために必要とする計算労力は、システム変数、スラック変数及び人為変数の関数となるので、縮小タブローによりこの数を減少させることができる。この方法によるシンプレックス法タブローのエントリの総数は$(m+n)n$個であり、従来のLP計算アルゴリズムと比較して計算効率は大幅に向上する。

III　数値計算例

IIで述べた計算手順にもとづく計算プログラムを作成し下記の問題を解いて最適解を求めた。

例1：つぎの最小化問題を考える。

Minimize　：$0.25b_1+b_2^2$

Subject to　：$\sqrt{b_1}-b_2\leqq 0$

　　　　　　$-4b_1^2+b_2\leqq 0$

図1に横軸に設計段階を縦軸に設計変数の値をとり、設計履歴を示す。図2には目的関数の履歴を示した。本例題の解は視察により（0.397, 0.63）であり、プログラムにより同様の結果を得ることができる。

例2：

Minimize　：$(b_1-4)^2+(b_2-4)^2$

Subject to　：$-25+b_1^2+b_2^2\leqq 0$

　　　　　　$-7+b_1^2-b_2^2\leqq 0$

図3および図4に本例題に対する設計履歴を示す。計算結果は文献(2)による解（3.54, 3.54）とよい一致を示す。

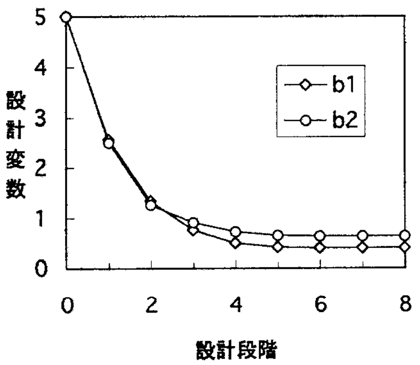

図1　設計変数の変化（例1）

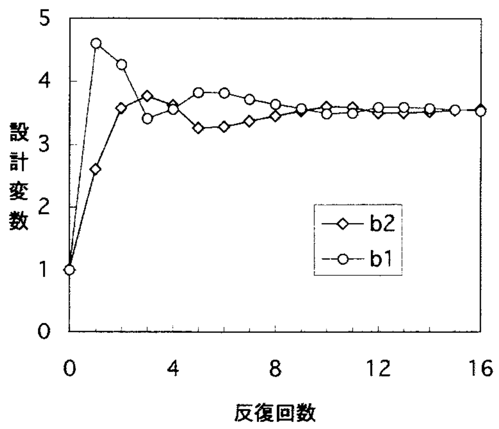

図3　設計変数の変化（例2）

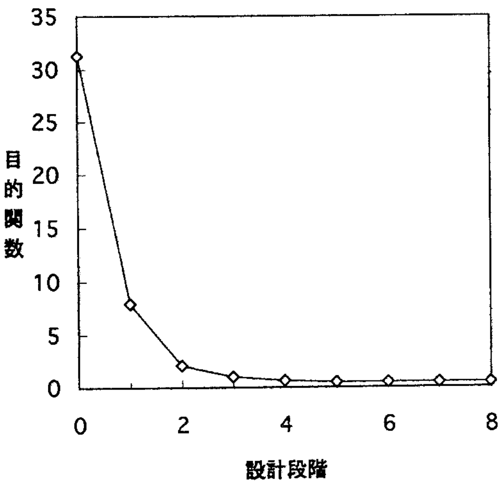

図2　目的関数の変化（例1）

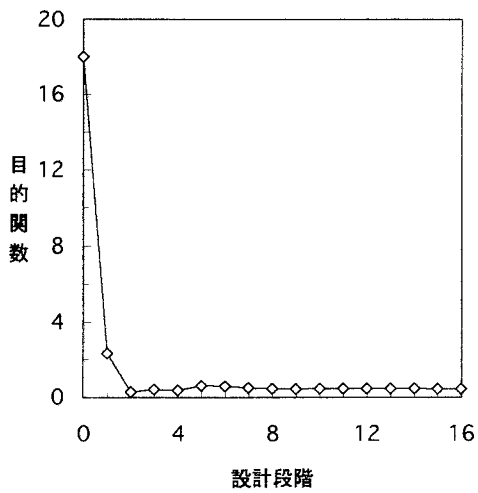

図4　目的関数の変化（例2）

Ⅳ　まとめ

現在のところあらゆる設計問題に有効で汎用的な非線形計画アルゴリズムは存在せず、種々の異なるタイプの最適化問題に対して多くのアルゴリズムが提案されている。これらの解法の適用可能性とその限界を踏まえて、最適設計問題に適合したアルゴリズムを使用することが望ましい。また既存のアルゴリズムの計算効率や収束性を良くすることも不可欠である。この点に関して従来型のSLPの計算効率を著しく向上させることができた。

構造最適化の問題では、原凸非線形問題よりも許容領域の外側で制約面が線形近似されることが多い。また工学的な立場からは、許容領域の内側から最適点に近づく方が望ましい。次報では線形近似された設計空間の中心に改良解を移動するSLPアルゴリズムの開発事例を報告する。

参考文献

(1) Hartley, R.: Linear and Nonlinear Programming, Ellis Horwood, 1985.

(2) Avriel, M. Nonlinear Programming, Prentice-Hall, 1980, p. 463.

(3) Arora, J. S.: Introduction to Optimum Design, McGraw-Hill, 1989.