

シェルの座屈後挙動有限要素解析プログラムの開発方法について

北海道職業能力開発短期大学校 寺島周平

Development of A Nonlinear FEM Program for Post-Buckling Analysis of Shells

Shuhei TERASHIMA

要約 既存の非線形FEM構造解析プログラムを改良してシェルの座屈後挙動解析プログラムへ発展・拡張させるための開発方法を紹介する。非線形FEMプログラムのカスタマイズを行う際に、ソースコードの形態で配布されるひな形を用いることができれば便利である。この方法により、プログラム開発の期間と労力を大幅に軽減することができる。非線形有限要素プログラムNONSAPをベースとして弧長増分法によるシェルの座屈後挙動解析機能を追加することができた。その方法を紹介して、数値計算例を通じて改良プログラムが有用であることを示す。

I 緒言

汎用非線形FEMを用いた構造解析が身近な作業として行われるようになり、プログラムのカスタマイズを行いたい利用者がしだいに増えている。このような場合には、既存のソースコードを変更するほうが利点が多い。そのプログラムがもつ過去の資産をそのまま継承できるので、発展性や保守の容易さという点からみると非常に優れている。

ソースコードの形態で配布される比較的小規模な非線形FEMプログラムの一つにNONSAP⁽¹⁾がある。NONSAPはソースコードだけでなく、プログラムの内容を解説した文献⁽²⁾も入手可能である。また、モジュール化がなされているため、新規要素や材料モデルの追加が極めて容易である。

板殻構造の非線形解析を行う際に活用するため、NONSAPに座屈後挙動解析の機能とシェル要素を追加する方法を紹介する。このような変更はプログラムを理解するための教材や技術資料としても有用である。本報告では、NONSAPにこれらの新しい解析機能を組み込む事例を紹介する。解析機能に関する知識を整理してから具体的なインプリメンテーションの手順を述べる。代表的な数値計算例を示し、改良プロ

ラムの有効性を検討する。

II NONSAPの移植

最初に、NONSAPのコンパイルと結果の検証作業が必要である。NONSAPのソースコードをサブルーチン単位に分割して、makeを用いてコンパイル、リンクを行う。あるいは、SCCSなどの大規模なプログラムに対するバージョン管理ツールを利用することがプログラムを管理する上から望ましい。

コンパイル作業の段階では様々な原因によってエラーが発生する。エラーの原因は以下に述べるFortran IVとFortran77との文法の違いによる。NONSAPはFortran IVを用いて開発されているが、修正はFortran77に基づいて行うほうが便利である。しかし、Fortran IVとFortran77には完全な互換性がない。ホレリス文字の表現や入出力命令に関する言語仕様の違いを確認する必要がある。これらの違いは比較的容易に修正を行うことができる。また、Fortran IVではどのような条件でも、DOループ内部の処理が一回は実行される。一方、ループの制御変数の初期値が終値より大きい場合、Fortran77ではループ内部の処理は行われない。この問題は固有价值問題のソルバーであるサブルーチンBANDETにおいて発生した。最後に計算

処理に要する時間を取り出すためのサブルーチンをコンパイラに適合するものに変更しておく。

NONSAPでは、計算処理に必要な配列がラベル無しのCOMMON文によって割り当てられ、各サブルーチンに引き渡されるダイナミックメモリアロケーションを用いている。メモリ空間を有効に使用して数万自由度の問題を解くために、この手法は現在においても不可欠である。大規模な問題を解く場合、メインプログラム先頭書かれた以下の3行を変更して、配列を新たに宣言・拡張することができる。変数MTOTはワードで表示した配列の総数の最大値である。COMMON文で宣言される配列の最大値はMTOT+1にする。CALL命令を実行する前に、割り当てられた配列の総ワード数が変数MTOTを超えていれば、エラーメッセージを出力して停止する。

```
COMMON A(10001)
NUMEST=2000
MTOT=10000
```

このような手法を用いてDOSマシンからUNIXワークステーションまでの様々なシステム環境で同一のソースコードをコンパイルすることが可能になる。異なる計算機の利用する上で、プログラムの移植がきわめて容易になる。

NONSAPに含まれるエラーに対してカリフォルニア大学は責任を負っていない。利用者は現実の問題を解く際に、結果の検証を十分に行っておかなければならない。カリフォルニア大学が配布しているSESMレポート⁹⁾にはプログラムの例題が含まれているので、これらの例題との比較を行って、実行結果と一致することを確認しておかなければならない。理論解説書に相当する文献(2)に含まれる例題との比較もまた有効である。

III 座屈後挙動解析機能の追加

1. 弧長増分法の定式化

NONSAPでは変位追従型の改訂Newton-Raphson法²⁾により平衡方程式の解を求めている。座屈後挙動解析を行うためには、これを解の発散を防ぐ数値計算法に置き換えなければならない。平衡方程式の反復解法は弧長法¹⁵⁾による座屈後負荷経路の正確な追跡アルゴリズムを用いる。数値計算の経験によれば、このアルゴリズムは収束性が良く計算過程が安定である。座屈点の近くでも必要な反復回数が少なく、かつ

比較的自由度の大きい問題でも、適度の計算時間で解くことができる。本節と次の節において、弧長増分法の定式化と対応させながらプログラム作成方法について述べる。

静的問題を考えると離散化された系のつりあい方程式は(1)式により与えられる。変位法に基づく非線形有限要素法において、未知変位に加えて外荷重パラメータも変数として取り扱えば、平衡方程式を次のように書くことができる¹⁵⁾。

$$f(u^*, \lambda^*) = 0 \tag{1}$$

ここで、変位ベクトルを u^* 、荷重パラメータを λ^* のようにおく。一定の荷重モードを R_{ref} 、荷重パラメータを λ とすると、時刻 t における荷重ベクトル R は(2)式により表わすことができる。また R は保存力とする。

$$R = \lambda R_{ref} \tag{2}$$

時刻 $t + \Delta t$ における変位ベクトルを ${}^{t+\Delta t}u$ 、系の内力ベクトル ${}^{t+\Delta t}F({}^{t+\Delta t}u)$ をとおく。内力は変位ベクトルの関数ではなく、 ${}^{t+\Delta t}u$ に至る経路に依存すると考えられるが、簡略化して ${}^{t+\Delta t}F({}^{t+\Delta t}u)$ のようを表す。(1)式は

$$f(u^*, \lambda^*) = \lambda R_{ref} - {}^{t+\Delta t}F(u^*) \tag{3}$$

のように表すことができる。

ここで、変位増分を $u = {}^{t+\Delta t}u - {}^t u$ の様に定義する。(i-1) 回目の反復における平衡方程式の解が既知であると仮定して、(1)式をテイラー展開すると、(4)式の平衡方程式を導くことができる。(i-1) 回目の反復における荷重パラメータを ${}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)}$ 、内力ベクトルを ${}^{t+\Delta t}F^{(i-1)}$ 、(i) 回目の荷重増分パラメータの変化分を $\Delta\lambda^{(i)}$ のようにおく。 ${}^{t+\Delta t}K^{(i-1)}$ は接線剛性行列で、正則であると仮定する。荷重パラメータと内力ベクトルの初期値を ${}^{t+\Delta t}\lambda^{(0)} = {}^t\lambda$ 、 ${}^{t+\Delta t}F^{(0)} = {}^tF$ とする。三角分解の回数を減少させるために、 ${}^{t+\Delta t}K^{(i-1)} = {}^tK$ のように近似する。

$$K\Delta u^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)} R_{ref} - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} + \Delta\lambda^{(i-1)} R_{ref} \tag{4}$$

(i) 回目の反復における変位ベクトル、荷重パラメータを(5)、(6)式のように修正する。

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{u}^{(i)} \quad (5)$$

$${}^{t+\Delta t} \lambda^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \lambda^{(i-1)} + \Delta \lambda^{(i)} \quad (6)$$

さらに、(7)(8)式において

$$\mathbf{K} \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t} \lambda^{(i-1)} \mathbf{R}_{ref} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)} \quad (7)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_{ref} = \mathbf{R}_{ref} \quad (8)$$

$\Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(i-1)}, \mathbf{u}_{ref}$ なる量を導入することにより、変位増分ベクトルの変化 $\Delta \mathbf{u}^{(i)}$ を(9)式のように表すことができる。

$$\Delta \mathbf{u}^{(i)} = \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(i-1)} + \Delta \lambda^{(i)} \mathbf{u}_{ref} \quad (9)$$

プログラムでは、弧長増分アルゴリズムの簡略化手法として、円筒型弧長増分法を採用する。 Δl を弧長増分として、非線形の経路を求める場合には(10)式を制約条件とする。

$$(\mathbf{u}^{(i)})^T \mathbf{u}^{(i)} = \Delta l^2 \quad (10)$$

(5)、(6)および(9)式を(10)式に代入すると $\Delta \lambda^{(i)}$ に関する2次方程式を得ることができる。二つの根に対応する変位増分ベクトルの変化を $\Delta \mathbf{u}^{(i)}, \Delta \mathbf{u}^{(j)}$ のようにあらわす。負荷経路上の逆戻りを防ぐために、前段階の荷重ステップにおける変位増分ベクトルと \mathbf{u}_0 の内積 $\mathbf{u}_0 \cdot \Delta \mathbf{u}^{(i)}, \Delta \mathbf{u}^{(j)}$ を計算し、最大となるものに対する根を選択する。

荷重増分パラメータの初期値 $\lambda^{(0)}$ は(11)式を用いて求めることができる。

$$\lambda^{(0)} = s \frac{\Delta l}{\sqrt{\mathbf{u}_{ref}^T \mathbf{u}_{ref}}} \quad (11)$$

変数 s は時刻 t における接線剛性行列 \mathbf{K} が正定行列であるとき、1をとり、 \mathbf{K} が負の固有値をもつ場合には、-1をとるものとする。

変位の収束判定基準を ϵ_D として、(12)式のような適当な収束条件が満足されるまで反復を繰り返す。

$$\epsilon_D = \frac{\|\Delta \mathbf{u}^{(i)}\|_2}{\|{}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(i)}\|_2} \quad (12)$$

(4)、(10)式は負荷経路全体に対して成り立つので、座屈前後の構造応答を同一の定式化を用いて計算することができる。

2. プログラム作成方法

本節では1で述べた弧長増分法をNONSAPへ組み込む方法を示す。もとのプログラムとデータの互換性を保つために、入力データや変位・応力などの出力データフォーマットは可能な限りこれを変更しないようにする。ほとんど使用されないオプションに関しても、削除しない方が望ましい。不必要なソースコードの変更を避けることは互換性を保つためにも必要である。また、デバッグが終了するまで、実行中に処理がどの部分まで進んでいるかを把握することができれば便利である。そこでプログラムの適当な位置に処理内容が出力されるようなWRITE文やPRINT文を入れておく。変更の対象となるサブルーチンはLOADSとEQUITである。あらかじめこれらを解読して、プログラムの基本的な流れを把握しておく。その内容を深く理解した上で拡張を行うことが最も重要である。はじめにサブルーチンLOADSを修正する。NONSAPの荷重データから \mathbf{R}_{ref} を適当な方法で設定する。 \mathbf{R}_{ref} はデータ入力フェーズにおいてWRITE文を用いて装置番号13番の外部ファイルへ保存する。次に、改訂Newton-Raphson法のサブルーチンEQUITを修正する。このサブルーチンは、解析モデルに非線形有限要素が含まれる場合には常に呼ばれる。したがって、このサブルーチン変更に伴う誤りの発見は比較的容易である。サブルーチンの引数並びには、 $\mathbf{R}_{ref}, \mathbf{u}_{ref}, \mathbf{u}_0, \lambda^{(0)}, \Delta l$ を新たな変数または配列として並べる。メインプログラムにおいて割り当てられる配列はIIで述べたダイナミックメモリアロケーションに従って拡張する。 \mathbf{R}_{ref} の内容はサブルーチンEQUITにおいて、収束計算のループに入る前に配列に読み込む。具体的な計算アルゴリズムを以下に示す。

- ① 装置番号10番のバイナリファイルから三角分解された接線剛性行列 $\mathbf{K} = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}$ を配列に読み込む。その対角要素に対する積の符号から(11)式における s を決定する。
- ② NONSAPに備えられたスカイライン法ソルバーCOLSOLを呼び出し、(8)式を用いて \mathbf{u}_{ref} を計算する。
- ③ 与えられた弧長 Δl を用いて(11)式における $\lambda^{(0)}$ を計算する。他には、Newton-Raphson法において用いた荷重ステップ増分量を $\lambda^{(0)}$ として、(11)式を Δl について解く方法が考えられる。NONSAPは装置番号3番のバイナリファイルに格納された \mathbf{R} を各荷重ステップにおいて配列に読み込むようになっているが、この部分はコメント行にして除いておく。 $\lambda^{(0)}$ および①における \mathbf{K} を用いて変位増分ベクトルの初

期値 u_0 を $u_0 = \lambda^{(0)} \cdot KR_{ref}$ から求めることができる。

- ④ (7)式を用いて $\Delta \tilde{u}^{(i-1)}$ を計算する。形状データを更新してから、全ての非線形要素グループに属する要素剛性行列のサブルーチンを呼び出し、内力ベクトルを修正する。
- ⑤ $\Delta \lambda^{(i)}$ に関する2次方程式(10)式を解いて二つの実根に対する変位増分ベクトルの変化 $\Delta u_1^{(i)}, \Delta u_2^{(i)}$ を求める。
- ⑥ u_0 と $\Delta u_1^{(i)}, \Delta u_2^{(i)}$ の内積 $u_0 \cdot \Delta u_1^{(i)}, u_0 \cdot \Delta u_2^{(i)}$ の符号を計算する。より大きい値に対応する $\Delta u^{(i)}, \Delta \lambda^{(i)}$ を選択して、(5)(6)式により ${}^{(i+1)}u^{(i-1)}, {}^{(i+1)}\lambda^{(i-1)}$ を修正する。
- ⑦ 収束判定基準(12)式が満足されない場合は、④へ戻る。

弧長増分法においては、(10)式の解の存在が必ずしも保証されないことを認識する必要がある。解が発見できない場合の対策として、リスタートファイルを装置番号10番に生成してから、反復計算を中断する。

IV 3次元縮退シェル要素の追加

1. 定式化に関する補足

NONSAPはトラスと2次元ソリッド要素を用いた静的及び動的な非線形解析が可能であるが、曲げ板やシェル要素は含まれていない。シェル要素など新規要素タイプは利用者が用意しなければならない。有限要素法によるシェルの解析理論に関する提案や、それらに基づく構造解析は専用プログラムを作成して行われることが多い。現実の問題へ適用する場合にも、シェル要素があると非常に便利である。有限要素は、3次元連続体の縮退シェル要素⁽⁶⁾を積層異方性が取り扱えるように変更したものをを用いる。シェルの変形前の状態におけるシェル中央面に垂直な平面断面は変形後も平面を保つが中央面に垂直ではないと仮定する。さらに板厚方向の垂直応力を無視する。この要素は実用理論から導かれるシェル要素に比べて汎用性がある。さらに、せん断力やモーメントから断面特性の情報を用いて、改めて応力を評価する後処理を必要としない利点をもつ。文献(6)(7)を簡単に補足してから、プログラム構成を述べる。

- ① 有限要素定式化を行う際に、シェル中央面からのプライの偏心の影響を考慮しなければならない。要素境界における変位の適合性を満足するために、形状と変位を2次の内挿関数 $h_k(r, s)$ により補間するアイソパラメトリック定式化を用いる。正規化された要素座標系を (r, s, t) のようにおく。文献(6)

における(2)式を下に示す(13)式に置き換えてから、線形及び非線形のひずみ増分要素剛性行列を計算する。時刻 t において大変形、大回転生ずるプライ内における任意点のデカルト座標成分 $'x_i$ を(13)式で表すことができる。シェル要素の節点総数を n 個とする。

$$'x_i = \sum_{k=1}^n h_k 'x_i^k + \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{t}{2} a_k + \Delta^k \right\} h_k V_{ni}^k \quad (13)$$

- $'x_i^k$: 時刻 t における節点 k のデカルト座標
- a_k : 節点 k におけるプライ層厚
- V_n^k : 時刻における節点に関する基底ベクトル
- Δ^k : 節点におけるシェル中央面から考慮中のプライまでの偏心量

- ② 文献(6)では、「 V_n^k は入力データとして与える。」と述べられているが、解析形状の特異点がない場合にはベクトル解析の知識を用いて求めることができる。この場合、シェル要素の節点 k を共有するすべての要素について、同一の基底ベクトル V_n^k を割り当てなければならない。
- ③ シェル要素の定式化を行う際に、行列表記による計算は誤りの主な原因であり、また時間を浪費する仕事である。そこで中間段階では全てテンソル表記のまま計算を進め、プログラム設計の段階において、フリーインデックスを行列の各エントリに割り当てる方法を採用する。
- ④ 直交異方性軸は要素座標系とは平行ではない。材料主軸からみた応力ひずみ変換行列を全体座標系からみたものに変換する際に、配向角の符号規約を明確にしたコーディングをすべきである。また、板厚方向に対して各プライの応力ひずみ行列が異なるので、要素積分を実施する際には、各プライにおいて数値積分を実行しなければならない。

2. プログラムの構成

シェル要素ライブラリは以下のような方針に基づいて開発する。2次元ソリッド要素のサブルーチンから必要なものを抜き出すことによって、シェル要素の作成を行う。NONSAPの2次元ソリッド要素については一応完成状態に達していると考えて良い。これを再利用して新しい要素を付け加えることができれば、より効率的である。ソースコードのサイズという面ではやや不利であるが、2次元ソリッド要素において用いられる変数と等価な変数名や配列名を用いることによ

り、プログラムの見通しを良好にすることができる。例えば、積分の変数変換を行うJacobi行列やひずみ・変位変換行列、第2種Piola-Kirchhoffの応力計算などは2次元ソリッド要素のものを修正する。

図1にはシェル要素のサブルーチン構成を示す。代表的なサブルーチンの機能を簡単に述べる。ELEMNTは要素タイプ別の計算処理を制御するモジュールである。ここで、トラスや2次元ソリッド要素の計算処理への分岐が行われる。シェル要素のタイプは4とする。シェル要素のサブルーチンSHELLDMをここに付け加える。SHELLDMは計算に必要な配列の動的割り当てと、この要素グループに属する全てのデータのリード、ライト、リストアを行う。SHELFEは要素剛性行列、内力ベクトルの計算と重ね合わせおよび応力の評価を行う。線形、Total Lagrangian定式化とUpdated Lagrangian定式化の計算処理をひとつのサブルーチンSHELFE内において作成する。これはデータ入力文を有しており、IIにおいて述べた1次元配列Aの1からNUMESTまでの場所にシェル要素グループの情報を記憶する。全体剛性行列を重ね合わせるフェーズでは、シェルの板厚方向に沿った節点基底ベクトル V_n^* を改良してから、その大きさが1になるように正規化する。QUADSSは要素剛性行列の計算を行う。この内部で要素積分を実行する。COLHTは、全体剛性行列のカラムハイトを計算する。ADDBANは全体剛性行列の重ね合わせを行うサブルーチンである。以下のサブルーチンは考慮中の有限要素

素に関する数値積分のループ内に置かれる。DERIQSはガウス積分点においてひずみ変位変換行列を計算する。STSTSLは線形ひずみ応力変換行列を計算して、プライの直交異方性を定義した座標系から全体座標系へ変換する。STSTSNはひずみの非線形項を計算してから、非線形材料モデルのサブルーチン呼び出して、応力を計算する。FUNCTSは2次の内挿関数 $h_k(r,s)$ の r,s に関する微分形を計算する。CAUCH3は破壊則を適用することを目的として第2種Piola-Kirchhoff応力からCauchy応力への変換を行う。

V 数値計算例

本章では拡張したプログラムを用いて数値計算を行う。例題として平面トラス、シェルの座屈問題を取りあげる。さらに積層シェルの座屈解析に適用した事例を示す。

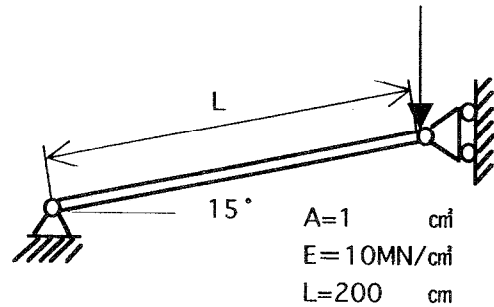


図2 1部材平面トラスの解析モデル

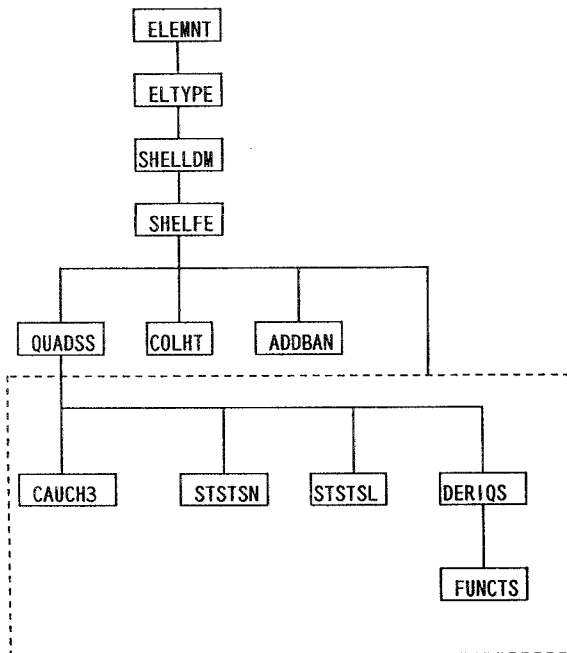


図1 シェル要素のサブルーチン構成

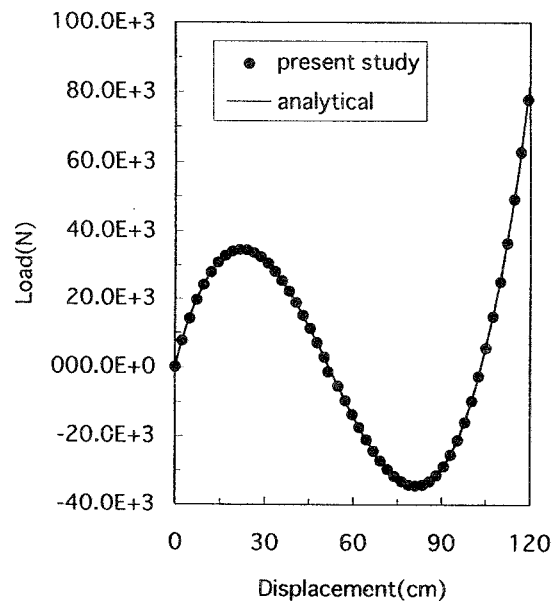


図3 1部材平面トラスの荷重変位曲線

あげる。さらに積層シェルの座屈解析に適用した事例を示す。

1. 平面トラスの荷重・変位曲線

NONSAPの3次元トラス要素を使用して図2のような1部材平面トラスの弾性安定解析を行い、弧長増分法の妥当性を確認した。形状及び材料パラメータを(14)式に示す。解析解と併せて荷重変位曲線を図3に示してある。

$$L=200\text{cm}, A=1\text{cm}^2, E=10^7\text{N/cm}^2 \quad (14)$$

2. 集中荷重を受ける円筒シェルの座屈後挙動解析

これはシェル要素の動作を確認するために行った円

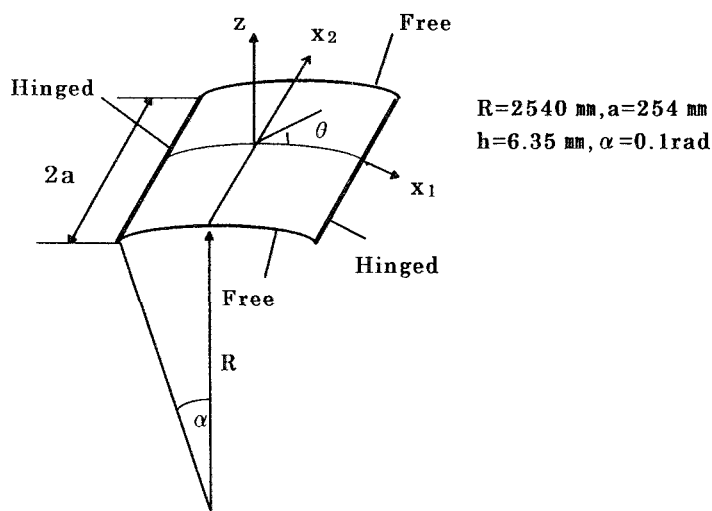


図4 円筒シェルの解析モデル

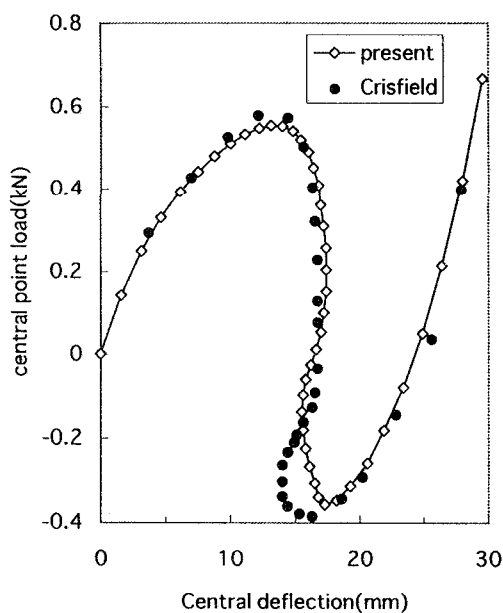


図5 円筒シェルの荷重変位曲線

筒シェルの大変形座屈解析である。対称性を考慮して、1/4モデルで解析を行った。解析モデルを図4に、幾何学的及び形状パラメータは(15)式のように与えられる。シェル面内には4点の数値積分点をとる。文献(5)の解析結果を併せて図5に示す。両者は良い一致を示すことがわかる。

$$\begin{aligned} R &= 2540\text{mm}, a = 254\text{ mm}, h = 6.35\text{mm}, \\ E &= 3.103\text{kN/mm}^2, \nu = 0.3 \end{aligned} \quad (15)$$

3. アングルプライ積層円筒シェルの座屈後挙動解析

複合材シェルを用いた設計では、面内変形と曲げの連成を利用してねじりに対する設計要求を満たすことが多い。本節では図4と同じ形状をもつアングルプライ積層シェルの数値計算例を示す。図6にプライ配向角の符号規約を示す。要素座標系の向きは x_1, x_2 軸と同

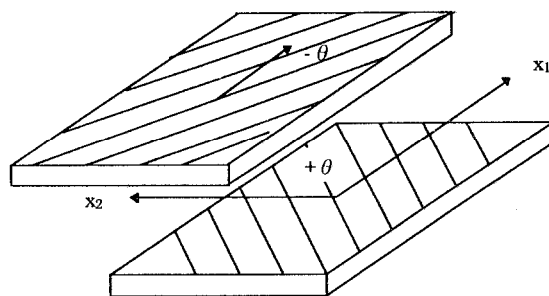


図6 アングルプライ配向角の符号規約 (+θ / -θ)

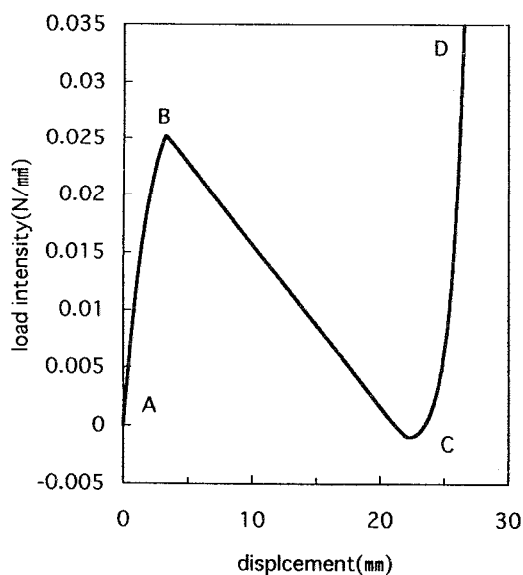


図7 アングルプライ積層円筒シェルの荷重変位曲線 (18×18meshes)

じ方向にとる。要素座標系の第一軸を反時計方向に回転させて直交異方性の第一軸に重ねることができるような配向角を正の向きにとる。寸法と材料定数は下記のとおりである。

$$\begin{aligned}
 & \text{半径 } R = 2540\text{mm}, \quad a = 254\text{mm}, \quad \text{板厚 } h = 6.35\text{mm}, \\
 & \alpha = 0.1\text{rad}, \quad E_{11} = 1.7241 \times 10^5 \text{N/mm}^2, \quad E_{22} = 6.897 \\
 & \quad \times 10^3 \text{N/mm}^2, \quad G_{23} = G_{13} = 3.448 \times 10^3 \text{N/mm}^2, \quad G_{12} = \\
 & \quad 1.379 \times 10^3 \text{N/mm}^2, \quad \nu_{12} = 0.15, \quad \text{せん断補正係数} \\
 & \quad \kappa = 6/7 \qquad \qquad \qquad (16)
 \end{aligned}$$

プライ積層順序は z 軸の正方向から見て $-45^\circ, 45^\circ$ の順に同じ混合比で重ねたアングルプライを考える。全領域に対して 18×18 の要素分割を行い、シェル面内には4点の数値積分点をとる。図7にはこの例題に対するシェル中央の半径方向変位と荷重乗数を示す。変形前の点をA点、座屈点をB点、最小点をC点とする。この例題では二つの分岐点B, Cを含む荷重変位曲線が得られる。荷重も変位も同時に減少する経路が存在する。荷重変位曲線は三つの分岐をもつ。この例題では座屈点近傍においてつりあい方程式の解の発散は見られなかった。

IV まとめ

本報告では既存の非線形FEMのソースコードを利用してシェルの座屈後挙動解析プログラムを開発する際の修正方法を紹介した。さらに、代表的な数値計算事例を示して、プログラムの有効性を示した。

ここで述べられている解析機能は既に発表された内容を集めたものであり、その大部分に関してオリジナリティは主張しないが、プログラム開発方法は独自のものである。この方法は積層複合材シェルの非線形FEM解析を設計感度解析や最適化に応用しようとする過程で生まれたものである。

既存のソースコードを利用してFEMの新しい機能を与える方法は、利用者にとって次のような利点があると考えられる。

- (1) プログラムの機能を全て理解することができる。
- (2) 利用者がプログラムに対して機能追加を自由に行うことができる。
- (3) どのようなハードウェア上へも自由に移植することが可能である。

【参考文献】

- (1) K. J. Bathe, E.L.Wilson, R.H.Iding, NONSAP A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Nonlinear Systems, UC SESM Report No. 74-3, Feb. 1974
- (2) K. J. Bathe, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, 1984
- (3) K. J. Bathe, H. Ozdemir, E.L.Wilson, Static and Dynamic and Geometric and Material Nonlinear Analysis, UC SESM Report No. 74-4, Feb. 1974
- (4) E. Riks, The Application of Newton's Method to The Problem of Elastic Stability, Journal of Applied Mechanics, Vol.39, 1060, 1972
- (5) M.A. Crisfield, A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles "Snap-Through", Computers & Structures, Vol. 13, 55-62, 1981
- (6) K. J. Bathe, S. Bolourchi, A Geometric and Material Nonlinear Plate and Shell Element, Computers & Structures, Vol. 11, 23-48, 1979
- (7) C. L. Liao, J. N. Reddy, Continuum-Based Stiffened Composite Shell Element for Geometrically Nonlinear Analysis, AIAA J. Vol. 27, No.1 (1989), 95