

# 最適設計のための 非線形計画法ライブラリの開発

## — その2 内接超球法 —

北海道職業能力開発短期大学校 寺島周平

Development of a Nonlinear Programming Library for Design Optimization  
Second Report : Method of Inscribed Hypersphere

Shuhei TERASHIMA

**要約** 工学的な設計問題を非線形計画法により解く場合、異なるタイプの最適化問題に対してプログラムライブラリ内に複数のアルゴリズムを備えておく必要がある。解の改良過程を途中で打ち切らなければならない場合、あるいは最終的な最適解が受け入れられないとき、最適点により近いものや許容解に近い中間解を選択することができるようなアルゴリズムが不可欠である。このような特徴を備えたアルゴリズムとして線形近似された設計空間の中心に改良解を移動する内接超球法 (Method of Inscribed Hypersphere) がある。このアルゴリズムを改良して、現在開発中の非線形計画法ライブラリに追加した。その概要を示し、数値計算例により妥当性を示す。

## I まえがき

設計最適化の問題では、原問題よりも許容領域の外側で制約面が線形近似されることが多い。通常の逐次線形計画法による計算では許容領域の外側で解の改良を繰り返すことになる。原問題が非線形凸計画問題であるとき、計算途中で得られる解は許容領域の外側に存在することが多い。そのため infeasible な領域への解の逸脱が生じやすく設計問題への適用という面からは望ましくない。そこで解の改良過程で許容領域の内側から設計空間の中心に向かって最適点に近づく現実的な最適化手法を備えておくことが不可欠である。このような特徴を備えた線形近似アルゴリズムとして内接超球法<sup>(1)</sup>がある。本報では著者が開発を進めている最適設計のための非線形計画法ライブラリ<sup>(2)</sup>に追加した内接超球法 (以下ではMIHとする) について報告する。従来の内接超球法アルゴリズムを改訂して上下制限約式における内接超球のマージンを選択する機能を追加した。さらに、変数変換と縮小クブロー

を用いて計算効率と収束性を向上させている。最初に改良型の内接球法アルゴリズムの概要を述べ、数値計算例を用いて、アルゴリズムの有効性を示す。

## II 基礎理論

設計問題の多くは設計変数に関して非線形となるが、原問題を線形化して現在の設計点に関する新しい線形化問題を構成する手続きを繰り返して正確な解を得ることができる。MIHは目的関数、制約条件とも線形近似し、目的関数の値をさらに減少させることも制約条件に加えた許容領域に内接する超球の最大半径をシンプレックス法により求め、その中心を改良解とする手法である。図1に3本の制約条件式を有する2変数の非線形最適化問題を示す。破線で表した直線は設計点 $X^0$ における線形近似問題を表す。内接超球法は線形化された許容領域に内接する超球の中で最大のものを見いだすように超球の中心へ移動するアルゴリズムである。図1では線形化した目的関数の値が一定の等

高線と $g_1(X)$ ,  $g_2(X)$  上の線形近似制約面に内接する円を示す。解の改良により設計点は $X^1$ へ移動する。

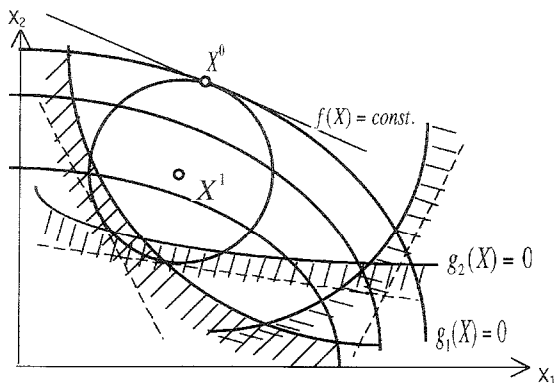


図1 3制約条件下の設計空間

目的関数を $f(X)$ ,  $j$  番目の非線形制約条件を $g_j(X)$ , 設計変数ベクトル $X$ の上下限を $X^U$ ,  $X^L$ とすると、一般化された非線形計画問題を次のように表すことができる。ここでは上下限制約条件式を非線形制約条件と区別する。非線形制約条件の総数を $m$  個、設計変数の総数を $n$  個とする。

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(X) & (1) \\ & \text{subject to } g_j(X) \quad j=1,m & (2) \\ & X_i^L \leq X_i \leq X_i^U \quad i=1,n & (3) \end{aligned}$$

目的関数 $f(X)$  は $X$  の非線形関数とする。目的関数と非線形制約条件式を現在の設計点 $X^0$  のまわりで、一次の導関数の項までテイラー展開し、近似最適化問題を(4)~(6)式のように構成する。

$$\begin{aligned} & \text{minimize } (X - X^0) \cdot \nabla f(X^0) & (4) \\ & \text{subject to } g_j(X^0) + (X - X^0) \cdot \nabla g_j(X^0) \leq 0 \quad j=1,m & (5) \\ & X_i^L \leq X_i \leq X_i^U \quad i=1,n & (6) \end{aligned}$$

テイラー級数展開を評価する設計点を明確にするために上付き添字の0を付加する。図2においてA点を許容領域内にある改良後の設計点 $X^1$ とし、 $X^0$ からA点までの方向ベクトルを $S$ とする。 $j$  番目の制約面 $g_j(X^0) = 0$ への垂直距離を $h_j$ , 線形化された目的関数の等高線へ下ろした垂線の長さを $h_f$ とする。A点が内接超球で最大のものの中心であれば、図2に示す幾何学的な関係より(7), (8)式が成り立つ。

$$h_f = - \frac{\nabla f(X^0) \cdot S}{|\nabla f(X^0)|} \quad (7)$$

$$h_j = \frac{\nabla g_j(X^0) \cdot \delta X - \nabla g_j(X^0) \cdot S}{|\nabla g_j(X^0)|} \quad (8)$$

$\delta X$  は現在の設計点 $X^0$  から $j$  番目の制約面 $g_j(X^0) = 0$ となる点へのベクトルである。制約条件に違反することなくかつ目的関数を増加させないで設計空間に収めうる最大の内接超球の半径を $r$ とする。 $r$ は(7), (8)式より求められる垂線の長さを越えてはならない。すなわち

$$\begin{aligned} r & \leq h_f & (9) \\ r & \leq h_j & (10) \end{aligned}$$

(7), (8)式をそれぞれ(9), (10)式に代入すると、線形近似された許容領域内で半径 $r$ を最大にするような次の近似LP問題を考えることができる。

$$\begin{aligned} & \text{maximize } r & (11) \\ & \text{subject to } \nabla f(X^0) \cdot S + |\nabla f(X^0)| r \leq 0 & (12) \\ & \nabla g_j(X^0) \cdot S + |\nabla g_j(X^0)| r \leq -g_j(X^0) \quad j=1,m & (13) \\ & X_i^L \leq X_i + S_i \leq X_i^U \quad i=1,n & (14) \end{aligned}$$

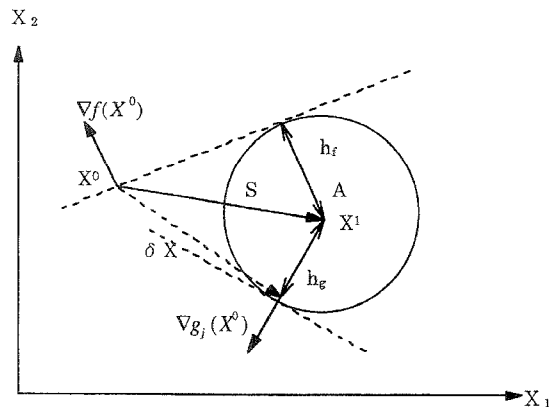


図2 線形近似された設計空間

(11)~(14)式で示される線形近似問題の制約式の総数は $m + 2n + 1$  個となる。ここで、新たな変数

$$t = X^0 - X^L + S \quad (15)$$

を導入することにより、(12)~(14)式を $t$ に関する線形近似問題として構成することができる。さらに超球の半径 $r$ のマージンを考慮すると、適当なムーブリミット $\alpha$ を課して上下限制約式を(16), (17)式のように表すことができる。

$$\beta r \leq t_i \quad (16)$$

$$t_i + \beta r \leq \alpha(X_i^U - X_i^L) \quad (17)$$

ここで $\beta$ は超球半径の距離に関する余裕値を表すパラメータである。 $\beta = 0$ とする場合、制約式の総数を $m + n + 1$  個に縮小することができる。一方、 $\beta = 1$ とおくと設計点が線形化された制約面に対して常に

超球の半径のマージンを持つために、解の逸脱を防ぎ収束性を向上させることができる利点をもつ。本プログラムでは $\beta$ の値を利用者が選択することができる。

小さい定数 $\epsilon$ に対して(18)式が成り立つとき、最適解が得られたものとして計算を終了する。

$$\max_i \left| \frac{S_i}{X_i} \right| \leq \epsilon \quad (18)$$

制約面と目的関数の等高線が平行に並んで走っているような問題に対して本アルゴリズムを適用すると、振動が生じて解が収束しないことがある。またテイラー展開による線形近似の精度が悪い場合に、infeasibleな領域への解の逸脱を生ずることがある。そこで線形近似の精度を保証する手段として移動制約を設定するためのムーブリミットの選択が非常に重要になる。本プログラムでは改良過程で解の振動が生じたときだけムーブリミットを小さくする方法を用いて収束性を向上させている。

また、近似LP問題のシンプレックスタブローは、スラック変数と人為変数の係数を含む疎な行列になる。掃き出し手続きにおいて、ある許容基底解からさらに改良された許容基底解へ移動するとき、基底へ組み入れる変数と基底から除く変数は常に一対である。本プログラムでは、スラック変数と人為変数に対する係数を省略して、非基底変数に対する制約条件式の係数のみを整列させた縮小タブロー<sup>(3)</sup>を用いた。基底変数に対する係数を配列に格納しないため、従来からあるシンプレックス法のアルゴリズムと比較して計算効率を大幅に向上させることができた。

### III 数値計算例

IIで述べた計算手順にもとづくプログラムを作成し下記に示す問題を解いて最適解を求めた。アルゴリズムの妥当性を検証するために解を視察により求めることができる非線形計画問題を考える。

$$\text{minimize } X_1^2 + X_2^2 - 2X_1 - 4X_2 \quad (19)$$

$$\text{subject to } \frac{1}{X_1} - X_2 \leq 0 \quad (20)$$

$$-2\sqrt{X_1} + X_2 \leq 0 \quad (21)$$

図3に横軸に設計段階を縦軸に設計変数の値をとり、設計履歴を示す。図4には目的関数の履歴を示した。図5にはこの問題に対する制約関数値の履歴を示す。

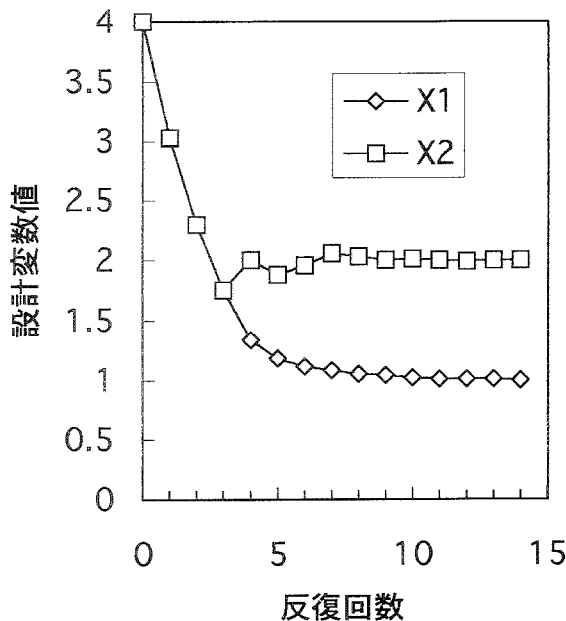


図3 設計変数の変化

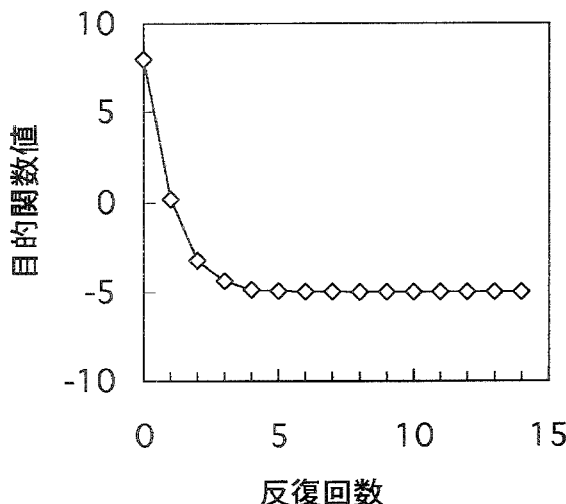


図4 目的変数の変化

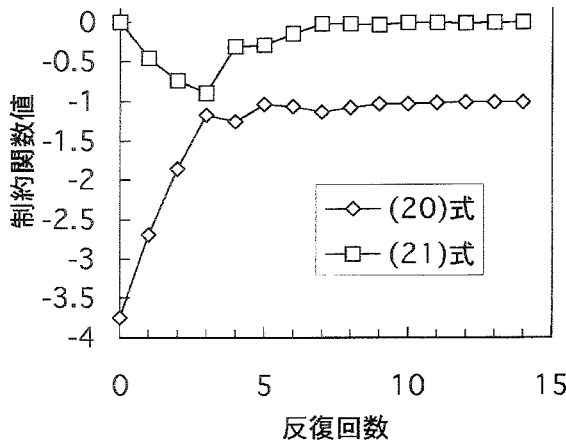


図5 制約変数の変化

第二の制約条件はゼロより小さい値を保ち、最適化の過程を通してアクティブではない。本例題では最適点が制約関数の凸多面体頂点に存在せず、制約条件第一式の制約面上の一点(1,2)に存在する。MIHを用いることによって、制約曲面上の交線上に位置しない最適点を求めることができる。

#### IV まとめ

(1) 収束性と計算効率を向上させたMIHアルゴリズムを提案した。超球半径に関する余裕値の選択や縮小タブローによるシンプレックス計算の機能を追加した。このライブラリは設計問題を解決するための実用的な意志決定支援ツールとして活用することができる。

(2) 簡単な数値計算例を示し、アルゴリズムの有効性を検証した。

#### [参考文献]

- (1) Baldur, J. E. : Structural Optimization by Inscribed Hyperspheres, J. Eng. Mech., ASCE, vol. 98, No. EM3, 1972, p503-508
- (2) 寺島、最適設計のための非線形計画法ライブラリの開発(その1)、職業能力開発報文誌第8巻1号、1996
- (3) Hartley, R., Linear and Nonlinear Programming, Ellis Horwood, 1985, p22-52