

表計算ソフトで解く 熱・流体力学問題についての報告

東北職業能力開発大学校

附属秋田職業能力開発短期大学校 田山英臣

Report of Heat and Fluid Dynamic Problem by spreadsheet

Hideomi TAYAMA

要約 多くの工学的な問題は、時間と位置の関数であったり、平面や空間の分布を扱うことが多い。このときに扱われる方程式は、偏微分の形になる。一般的にこの方程式を解く場合に差分法など各種数値計算法を用いて行っている。数値計算で熱・流体力学問題を取り扱う場合についても、以前は大型計算機などを用いプログラミング作業などに多くの時間と労力を必要としていた。近年、ハードウェアの性能向上とともに汎用解析ツールを用いた手法がエンジニアリング業務に多く用いられるようになってきている。しかしながら解析ツールを十分実用業務に役立てるまでにはやはり、かなりの時間と労力が必要となる。本報告では、日常業務で多用される表計算ソフトを用い、熱・流体力学問題を数値計算的に解く方法の紹介とその有用性について報告する。

はじめに

計算機の高速化・大容量化に伴い数値計算法による工学問題へのアプローチは、さまざまな分野で用いられその効果を発揮してきた。また、近年汎用の解析ツールが普及し日常のエンジニアリング業務に組み込まれ利用されるようになってきている。しかし、そこにいたるまでには、プログラミングの知識と作成技術やツール操作方法の習熟、解析に関する知識等の習得と習熟が必要でありそのために多くの時間を必要としている。そんな中で日常業務で使用される表計算ソフトは、通常は計算機能に加え工学計算上に必要な各種関数機能や繰り返し計算機能などがすでに組み込まれ、操作もまた簡単である。本報告では、計算ソフトを用いた熱・流体力学の基本的な問題について利用方法⁽¹⁾の紹介とその有用性について述べる。

偏微分方程式と工学問題

一般に偏微分方程式は、放物型、双曲型、楕円型に分類²⁾される。放物型の偏微分方程式は、物体中の熱の伝導状況などを表す方程式として知られている。式で表すと(1)式のようなになる。ここで変数 x 、 t は、それぞれ位置と時間の変数を表す。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

双曲型の偏微分方程式は、波動現象や物体の振動などを表す方程式として知られており、式で表すと(2)式のようなになる。ここで変数 x 、 t は、それぞれ位置と時間の変数を表す。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

楕円型の偏微分方程式は、物体の応力状態や熱の平衡状態など平衡状態を表す方程式として知られており(3)式のようなになる。ここでは、 x 、 y は位置の変数を表す。なおこの方程式はポアソンの方程式と呼ばれ、

特に $f(x, y) = 0$ のときラプラスの方程式と呼ばれている。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (3)$$

解析手法の比較と紹介

一般的に汎用解析ツールでは、以下の手順で解析の作業が行われる。

- 解析モデルの作成
- メッシュの作成 (メッシュタイプ、材料特性)
- 境界条件の設定 (支持方法、荷重等)
- 解析の実行 (ソルバー)
- 結果の表示と分析

いわゆるプリ・ポスト処理が必要となり解析ツール内を行ったり来りの作業となる。表計算を用いた場合、のモデルの作成からの解析の実行までが同一フィールド内 (ワークシート内) で行える。の結果の表示は、グラフ等で簡単に行える。以下に表計算ソフトを用いて行う場合の例を示す。

3 - 1 繰り返し計算機能を用いた場合

1) 板の温度分布

2次元の板の温度分布は、ラプラスの方程式で表され温度分布関数を $u(x, y)$ とすると偏微分方程式は(4)式ようになる。

$$\nabla^2 u = 0 \quad (4)$$

上式を差分表示し u_{ij} の形に変形すると(5)式のようにになる。

$$u_{ij} = \frac{1}{\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}} \left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) \quad (5)$$

ここで計算格子を正方形 ($\Delta x = \Delta y$) とすると(5)式は(6)式のようにになる。

$$u_{ij} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{4} \quad (6)$$

ここで、数値計算を行う対象モデルの形状は、図1に示すように表計算上のセルを用いて定義する。それぞれのセルに(6)式を適用していくことで差分計算の準備が出来る。(6)式を表計算のシート上で考えたとき図2に示すような計算式が入ることとなる。つまり現在のセルの値は、上下左右のセルの結果を加え4で割った値となることを意味する。このときの境界条件は、対象モデルの周辺部等必要な場所 (セル) に数値で与える。境界条件としては、左側から一様な温度 $T =$

100 で加熱し、残りの3辺を $T = 0$ に固定した場合である。今回計算を行う対象モデルと境界条件を図1に示す。

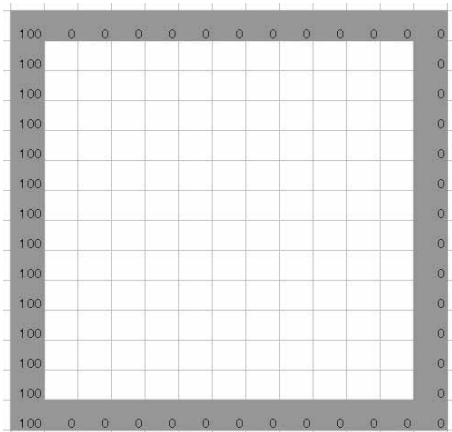


図1 解析モデル

図2に示すようにセルのB3に“0”を入れることで初期状態に戻すことができるようになっており何度でも再計算が出来る。また、境界条件は、B5、B6の値を変えることで設定できる。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	板の温度分布									
2										
3	計算実行(0クリア)	0		100	0	0	0	0	0	0
4	境界条件の設定			=IF(B\$3=0,0,(D4+F4+E3+B5)/4)						
5	加熱温度	100		100						
6	固定温度	0		100						

図2 計算式

対象モデルの繰り返し計算の条件設定は、図3に示す「ツール」の「オプション」の中にある「計算方法」を設定することで計算を実行させる。

図3の計算方法の中で繰り返し計算の回数となる「最大反復回数」と計算収束条件となる「変化の最大値」を適宜指定する。計算はいずれかの条件を満たせば停止する。基本的には、収束条件を満たして最大反

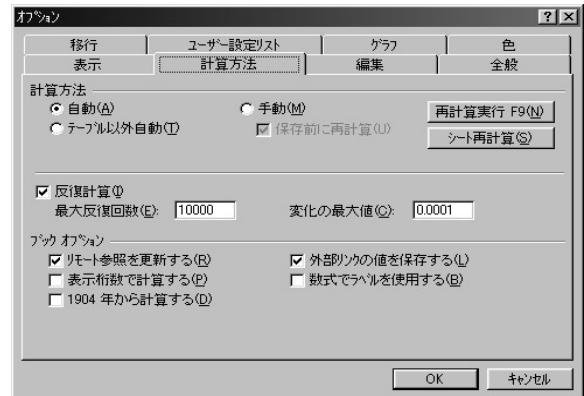


図3 計算方法

2個の障害物の周りを流れる流線をコンター図の形式で表したものである。2個の障害物の間隔が短いため流れが柱の間に回り込んでいないことがわかる。

(2)各軸方向の速度成分

流れ関数 Ψ より各軸方向の速度成分を求めてみる。 X 軸方向の速度成分 u 、 Y 軸方向の速度成分 v とすると u 、 v は(8)式より求めることができる。(8)式を差分表示し $u_{i,j}$ 、 $v_{i,j}$ の形に変形すると(9)式が得られる。

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{8}$$

$$u_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2 \times dy} \tag{9}$$

$$v_{i,j} = - \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2 \times dx}$$

この関係式より(1)で求めた流れ関数 Ψ の計算結果を用い、各軸方向の刻み幅 dx 、 dy を指定することで各軸方向の速度成分が計算できることがわかる。表計算ソフトを用い計算した x 軸及び y 軸方向の速度成分の計算結果を立体グラフ化したものを図8-1、図8-2に示す。このときの刻み幅 $dx=0.1$ 、 $dy=0.1$ としている。グラフより x 軸方向の速度成分 u 、 y 軸方向の速度成分 v とともに2カ所の障害物前後間で各速度成分が大きく変化している様子が現れていることが良くわかる。

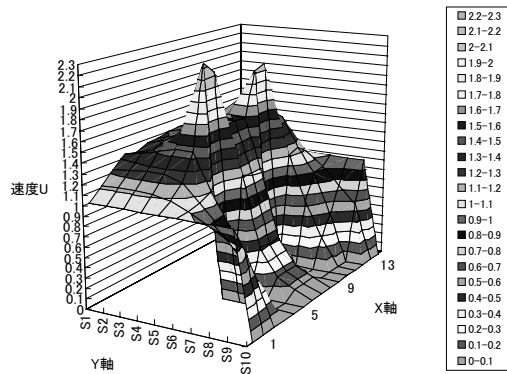


図8-1 x 軸方向の速度成分 u

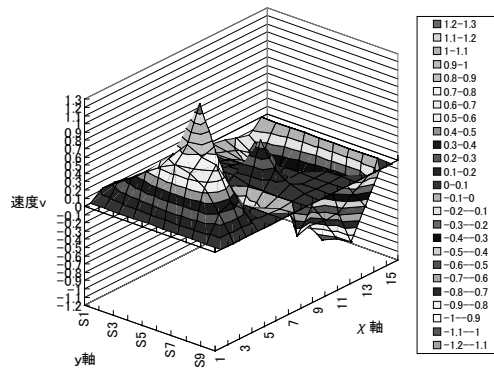


図8-2 y 軸方向の速度成分 v

(3)圧力係数 C_p

非圧縮性ポテンシャル流れにおけるベルヌイの方程式から圧力係数 C_p を(10)式のように定義する。

$$C_p = 1 - \frac{u^2 + v^2}{U^2} \tag{10}$$

この関係と前項で求めた各軸方向の速度成分の結果を利用し圧力係数 C_p を計算した。その結果を図9に示す。ここで U は一様流速とする。

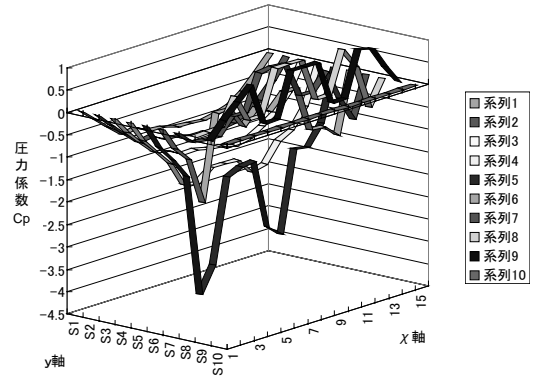


図9 圧力係数 C_p

3-2 各種関数機能を用いた場合

(1)複素ポテンシャルを用いた翼型

翼型を表記する方法はいくつかあるが(3)ここでは複素ポテンシャルを用いた方法で計算を行ってみる。 Z - 平面内で中心が $z_0 (= x_0 + i \cdot y_0)$ にあり $(1, 0)$ を通る円を(11)式で ζ - 面に写像する。

$$\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} = \left(\frac{z - 1}{z + 1} \right)^k \tag{11}$$

k の値により翼型は以下ようになる。

$k = 1$ の時 同一円

$k = 2$ の時 ジューコフスキー翼

$1 < k < 2$ の時 カルマン - トレットツ翼

今回は $k = 2$ で円の中心座標が $(-0.2, 0.2)$ の場合の翼型を計算しその結果を図10-1に示す。また中心座標が $(-0.1, 0.1)$ の場合の翼型を図10-2に示す。この時の迎角は両方とも $\alpha = 9^\circ$ である。写像される円の中心座標が変化すると翼の形状(厚み)が変化することがわかる。

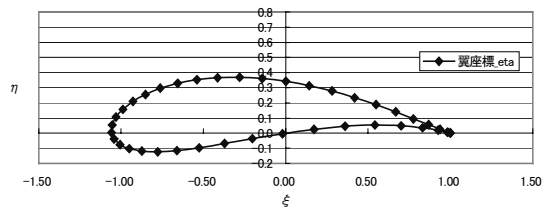


図10-1 ジューコフスキー翼 ($k = 2$ 、中心座標が $(-0.2, 0.2)$ $\alpha = 9^\circ$ の場合)

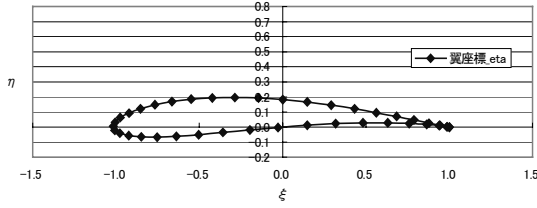


図10-2 ジューコフスキー翼
($k = 2$ 、中心座標が $(-0.1, 0.1)$ 、 $\alpha = 9^\circ$ の場合)

(2)複素ポテンシャルを用いた翼回りの解析

翼面上複素共役速度 V と翼面圧力係数 C_p はそれぞれ以下に示す(12)、(13)式で表される。

$$V = \left[U e^{-i\alpha} - \frac{U a^2}{(Z - Z_0)^2} e^{-i\alpha} + \frac{i\Gamma}{2\pi(Z - Z_0)} \right] \frac{dZ}{d\xi} \quad (12)$$

$$C_p = 1 - \frac{u^2 + v^2}{V^2} \quad (13)$$

ここで Γ : 循環、 α : 迎角、 U : 一様流速、 V : ξ - 面にける一様流速である。この式を用いて V と C_p を計算した結果を図11-1、図11-2に示す。

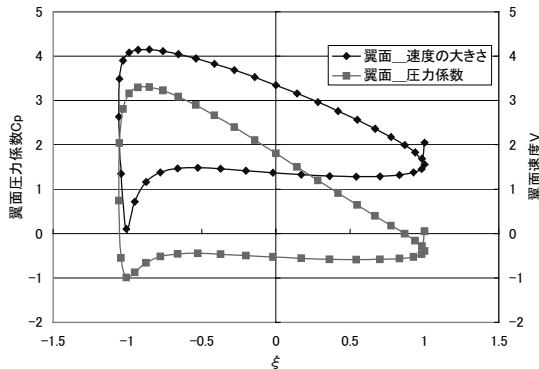


図11-1 翼面上複素速度 V 、翼面圧力係数 C_p
($\kappa = 2$ 、中心座標が $(-0.2, 0.2)$ 、 $\alpha = 9^\circ$ の場合)

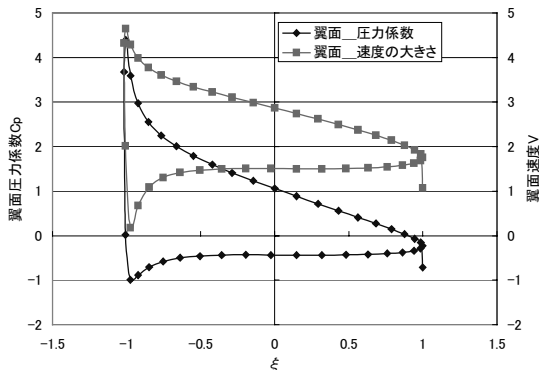


図11-2 翼面上複素速度 V 、翼面圧力係数 C_p
($\kappa = 2$ 、中心座標が $(-0.1, 0.1)$ 、 $\alpha = 9^\circ$ の場合)

翼面上複素速度 V 、翼面圧力係数 C_p とともに曲線で囲まれる面積が図11-1に比べて図11-2の方が小さくなっていることがわかる。

つぎに、揚力係数 C_L を(14)式のように考え近似計算

する。ここでは、翼弦長 c としている。

$$C_L = \frac{\rho V \Gamma}{\frac{1}{2} \rho V^2 c} = \frac{2\Gamma}{V c} \approx \frac{\Gamma}{v} \quad (14)$$

ここで V は ξ - 面における一様流速とし一般に以下の(15)式で与えられる。

$$V = k U \quad (15)$$

図10-1に示す翼型の場合で計算した時の揚力係数は、 $C_L = 2.42$ となっている。この翼型において、仰角 α を変化させた場合の揚力係数 C_L の値を計算した結果を図12に示す。

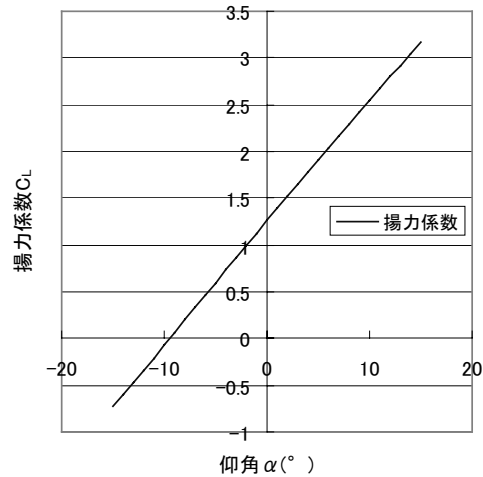


図12 揚力係数 C_L と仰角 α の関係

仰角 α の増加とともに揚力係数 C_L が増加していくことがわかる。しかしこのグラフからは、失速点を見つけることはできない。

(3)本解析に使用された複素関数

表計算ソフトには、あらかじめ種々の関数が準備されている。今回の計算に利用した複素関数の一部を以下の表2に示す。

表2 使用複素関数一例

複素関数	演算内容
IMDV	複素数の商
IMSUB	複素数の差
IMEXP	複素数のべき乗
COMPLEX	複素数の形式にする
IMABS	複素数の絶対値
IMSUM	複素数の和
IMLN	複素数の自然対数
IMAGINARY	虚数係数を返す
IMPRODUCT	複素数の積を返す
IMREAL	実数係数を返す

おわりに

表計算ソフトを用いて工学的問題を取り扱う場合、以下のような利点・注意点が考えられる。

汎用ツールのようなプリ - ポストを意識せず比較的簡単にシミュレーションが行える。

解析手法がブラックボックス化しない。

計算結果が瞬時に目の前で数値とグラフ機能で表示されるため非常にわかりやすい。

モデル形状の作成、境界条件の設定が容易である。

熱流体に限らず工学分野全てで利用可能である。

数式を適応する際、数学的内容を十分に理解しないと正しい解析結果を得られない。

複雑な形状や大規模解析に関しては、パソコンの性能に大きく左右されるため十分とはいえない。

学生への訓練や企業における基本的な解析手法の導入用として十分利用価値がある。

[参考文献]

- (1) 森下悦生、Excel で学ぶ流体力学、丸善出版、2000年、P 2 - P19
- (2) 三井田惇郎 / 荒井秀一、数値計算法、森北出版、1993年、P64 P78
- (3) 西山哲男、流体力学(1)、日刊工業新聞、1978年、P49 - P53、P99 P108
- (4) 生井武文 / 井上雅弘、粘性流体の力学、理工学社、1983年、P53 - P58