

# 制御工学シミュレーション教材の製作 － DCモータの速度制御法 －

近畿職業能力開発大学校

附属京都職業能力開発短期大学校 松岡良啓

Development of simulation teaching materials for control engineering  
Velocity control methods of DC motor

Yoshiaki MATSUOKA

**要約** 制御工学の理論を学問的に数理解析のみで理解する事は難解である。少子化のために入校希望者が著しく減少しているため入校の門戸を広げた。このために高校の専攻科と本校の設置科との関係が結び付かずに入校してきた事例もある。この現象は、文部系の大学に於いても同様に起きている。機械系の専門科目については、現在まで講義されてきた教材の見直しをせざるを得ない状況である。そこで、制御工学の授業においてもコンピュータを用いて、制御プログラムを学生が製作することによって、身近に制御の重要性、各種定数の意味を理解させる事ができる教材を製作したので、本稿において報告する。

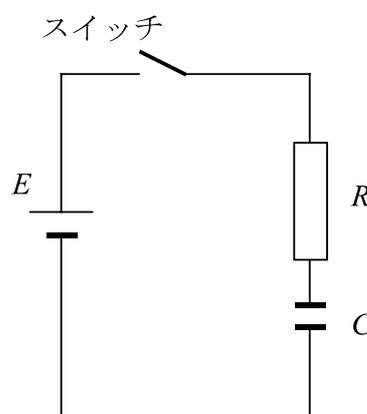
## 1. はじめに

制御工学を理解するためには、積分や微分と言った数学の手法は避けて通れない。そこで、これら数学の手法が実際どの様に計算されているか、コンピュータを用いてプログラムを作成し、その結果をビジュアル的に見ることにより、直感的に制御の考え方を理解できることが解った。さらに、これらのシミュレーションによって、制御システムの各種制御定数の意味や制御効果をも理解できるため、教材として有効であると思われる。

よび電流の変化をシミュレーションによって調べてみる。あらかじめ、学生には、ラプラス変換法等による微分・積分の解法を理解させて置く必要がある。

抵抗を $R$ 、コンデンサを $C$ 、電源電圧を $e(t)$ としたとき、キルヒホッフの第2則(電圧平衡式)から、回路に流れる電流を $i$ とすると、回路方程式は次式になる。

$$e(t) = R \cdot i + \frac{1}{C} \int i dt \quad \dots \quad (1)$$



$R$ : 抵抗 ( $\Omega$ )     $E$ : 電源 (V)  
 $C$ : コンデンサ (F)

図1 RC回路

## 2. 概要と手法

数式によって導かれた式に値を代入し、その計算値をコンピュータに表示させるという授業では、まったく興味を示さなかった学生が、本提案の手法を用いた授業では興味を持ち始めた。例えば図1に示す電子回路について、考えて見る。

スイッチをONにしたとき、コンデンサ $C$ の電圧お

また、電流  $i$  と電荷  $q$  は次式で表される。

$$i = \frac{dq}{dt} \dots\dots\dots(2)$$

$$q = \int idt \dots\dots\dots(3)$$

(2)、(3)式を(1)式に代入して次式を得る。

$$q = CV_c \dots\dots\dots(4)$$

$$V_c = \frac{q}{C} \dots\dots\dots(5)$$

$$i = \frac{e(t) - V_c}{R} \dots\dots\dots(6)$$

ここで、 $\Delta q$ は各計算における差分値であり  $q = q + \Delta q$  によって求めることができる。

$$e(t) = R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q \dots\dots\dots(7)$$

ここで、 $dq/dt$ を $\Delta q/\Delta t$ とし、(7)式より次式を得る。

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = (e(t) - \frac{1}{C}q) \frac{1}{R} \dots\dots\dots(8)$$

$$dq = (e(t) - \frac{1}{C}q) \frac{dt}{R} \dots\dots\dots(9)$$

(5)、(6)、(9)式を用いて、スイッチがオンになったときの電流  $i$  を求める。これらの計算をVisual Basic を用いて行う。図2にプログラムを、図3に計算結果（シミュレーション結果）を示す。

図1に示す回路に流れる電流値のコンピュータを用いた計算は、図2に示すように比較的簡単なプログラムで計算できる。

機械系においても、機械要素を電子部品や電子回路に置き換えて、プログラムを作りシミュレーションすることが可能である。

- たとえば、
- コイルの両端に生じる起電圧は、 $Ldi/dt$ 、
- 粘性摩擦力は、 $fdx/dt$  ( $x$ は位置)
- 抵抗と電流による電圧は、 $i \times R$
- バネ常数による力は、 $K \times x$

このように類似の式で表される事が多い。

```
Private Sub cmstert Clik( )
R=10:E=100:q=0:/R( ),E(V)
dt=0.001:C=0.01:/dt(sec),C(F)
for lp=1 to 500
dq=(e(t)-q/C)*dt/R
q=q+dq
i=(e(t)-q/C)*1/R
Vc=q/C
Line (100,2500)-(100,1400)
Print " i Vc"
Line (100,2500)-(5000,2500)
Print " t sec"

pset(lp*8+100,2500-100*i)
pset(lp*8+100,2500-100*Vc)

next lp
endSub
```

図2 Visual Basicによるプログラム例

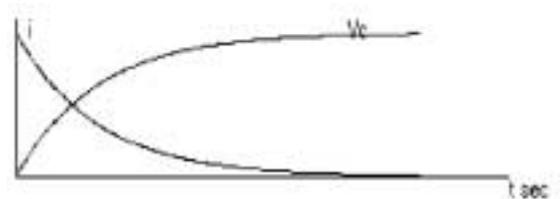


図3 シミュレーション結果

### 3. モータのシミュレーション法

図4にブラシ付き直流モータの内部回路を示す。

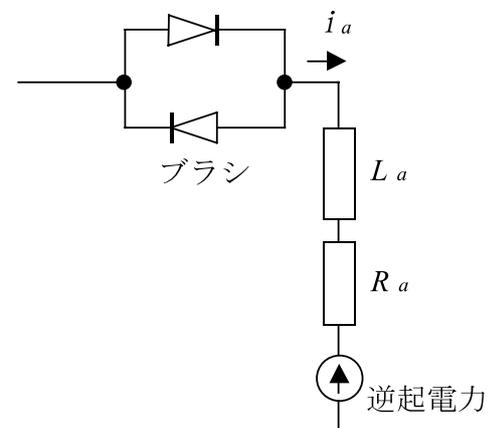


図4 ブラシ付き直流モータの内部回路

ここで

$K_E$ : 逆起電力定数 ( $Vs/rad$ )

$\omega$ : 角速度 ( $rad/s$ )

ブラシの電気的特性は、ダイオードの電気的特性に等しいので、等価回路ではダイオードで表現している。ブラシの電圧降下は小さいので無視すると、図4に示す回路の電圧方程式は次式となる。

$$V_a = L_a \frac{di}{dt} + R_a i_a + K_E \omega \quad \dots\dots(10)$$

モータが一定速度で回転する定常状態では、(10)式の右辺第1項は、無視することができるため、次式が得られる。

$$V_a = R_a i_a + K_E \omega \quad \dots\dots(11)$$

モータ軸に負荷を印加すると、そのトルクに逆らうトルクを発生するために、電流  $i_a$  が増加する。一定電圧でモータを駆動しているとき、逆起電力定数  $K_E$  は一定値であるから、電流が増加すると、(11)式を満足するために回転速度  $\omega$  が低下する。

負荷の大きさによらず、速度を一定にたもつためには、速度フィードバックを用いた速度制御が必要になる。

モータの発生トルク  $T$  は、次式で求められる。

$$T = K_T i_a \quad \dots\dots(12)$$

ここで、 $K_T$  はトルク定数 ( $Nm/A$ )

モータが発生したトルク  $T$  は、次式で示すようにモータや負荷を加速するトルク、粘性負荷を駆動するトルクおよび摩擦トルクに利用される。

ここで粘性制動係数を  $D$ 、慣性モーメントを  $J$ 、負荷トルクを  $T_L$  とすると、次式が得られる。

$$T = J \frac{d\omega}{dt} + D\omega + T_L \quad \dots\dots(13)$$

粘性負荷トルクは、回転速度に比例し、回転速度の2乗に比例する成分も含まれている。しかし、それらの値は非常に小さく無視することができる。

図5にブラシ付き直流モータの等価回路を示す。

ここで、

$K_T \times i_D$ : 粘性トルク

$K_T \times i_C$ : 加速トルク

$K_T \times i_L$ : モータ軸トルク (負荷トルク)

機械要素である慣性モーメント  $J$  は、電気的要素であるコンデンサ  $C$  に変換して表すことができる。

慣性モーメントを  $J$ 、回転速度を  $\omega$  とするとき、回転エネルギー  $e_0$  は次の式で計算できる。

$$e_0 = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad \dots\dots(14)$$

一方、コンデンサの容量を  $C$ 、端子電圧を  $V$  とすると、コンデンサに蓄えられたエネルギー  $e_1$  は次式で表される。

$$e_1 = \frac{1}{2} C V^2 \quad \dots\dots(15)$$

コンデンサ電圧は、逆起電圧  $K_E \omega$  に等しいので、

$$V = K_E \omega \quad \dots\dots(16)$$

と表される。等価回路上、これらのエネルギーは等しいので次式を得る。

$$\frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} C K_E^2 \omega^2 \quad \dots\dots(17)$$

これより、コンデンサの容量  $C$  は次式になる。

$$C = \frac{J}{K_E^2} \quad \dots\dots(18)$$

SI単位系では、逆起電力定数の値とトルク定数の値は等しいので、 $K_E = K_T = K$  と表すことができる。

#### 4. DCモータの伝達関数の表し方

図5に示すブラシ付き直流モータの等価回路より、回路方程式を求めると次式になる。

$$V_i(t) = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + \frac{1}{C} \int i_a dt \quad \dots\dots(19)$$

(19)式をラプラス変換すると次式になる。

$$V_i(s) = R_a I_a(s) + sL_a I_a(s) + \frac{1}{sC} I_a(s) \quad \dots\dots(20)$$

入力電圧と回転速度を表す伝達関数は次式になる。

$$G(s) = \frac{V_C(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{R_a + sL_a + \frac{1}{sC}} \quad \dots\dots(21)$$

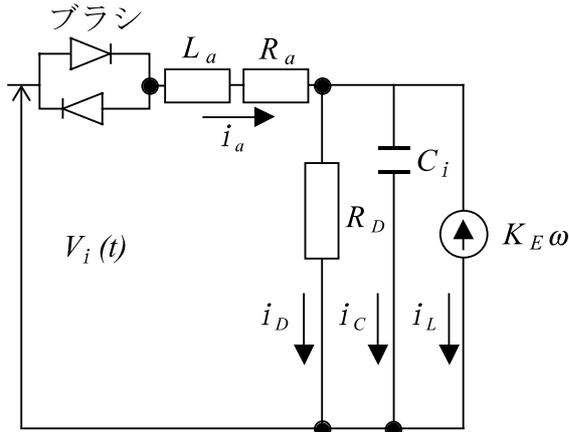


図5 ブラシ付き直流モータの等価回路

図5に示す等価回路より、電気的時定数  $\tau_e$ 、機械的時定数  $\tau_m$  とすると次のようになる。

$$\tau_m = \frac{JR_a}{K^2} \dots\dots\dots(22)$$

$$\tau_e = \frac{L_a}{R_a} \dots\dots\dots(23)$$

(21)式に、(17)、(22)、(23)式を代入すると、

$$G(s) = \frac{\frac{I}{K}}{1 + sR_a \frac{J}{K^2} + s^2 \frac{J}{K^2} L_a}$$

$$= \frac{\frac{I}{K}}{1 + s\tau_m + s^2\tau_m\tau_e} \dots\dots(24)$$

ここで、 $\tau_e \ll \tau_m$  であるとき、(24)式は次のように近似できる。

$$G(s) = \frac{\frac{I}{K}}{1 + s(\tau_m + \tau_e) + s^2\tau_m\tau_e}$$

$$G(s) = \frac{\frac{I}{K}}{(1 + s\tau_e)(1 + s\tau_m)} \dots(25)$$

### 5. ブロック図の表し方

(25)式によって表された伝達関数に基づいたブロック図は、図6に示すようになる。

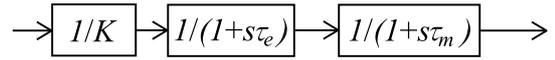


図6 伝達関数に基づいたブロック図

図7に示す1次遅れの伝達関数は、図8に示す積分を用いたブロック図で書き表すことができる。

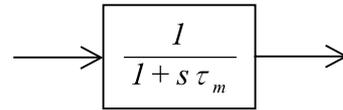


図7 1次遅れの伝達関数

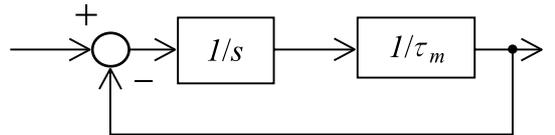


図8 1次遅れの伝達関数を表すブロック図

### 6. ブラシ付き直流モータのブロック図

図6に示すモータのブロック図は、モータの挙動を表現できるが、負荷を印加したときの回転速度やモータに流れる電流を求めることはできない。

そこで、負荷を印加したりモータに流れる電流の状態を調べるためには、図9に示すブロック図を用いることにする。

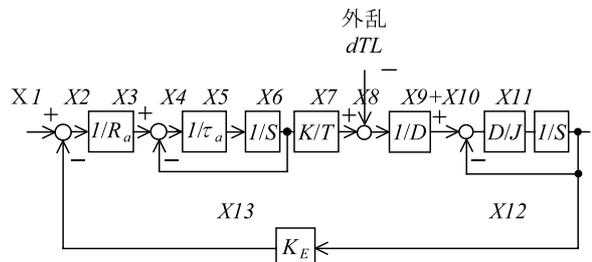


図9 ブラシ付き直流モータのブロック図

### 7. プログラムの作成

図9に示すブラシ付き直流モータのブロック図に基づき、シミュレーションプログラムを記述する。プログラムの作成に当たっては、図9中に示すように、ブロックの入力と出力に名前を付ける。ここでは、モータ供給電圧を10Vとした場合のプログラム例を図10に示す。

計算結果は、パソコンの画面上に表示している。

```

X1=10
For lp=1 to 10000
X2=X1-X13
X3=X2/Ra
X4=X3-X6
X5=X4/τe
X6=X6old+X5*dt
X7=X6*KT
X8=X7-d TL
X9=X8/D
X10=X9-X12
X11=X10*D/J
X12=X12old+X11*dt
X13=X12*KE
Pset(lp/2+1000,4000-X12*8)
Next lp
    
```

図10 ブラシ付き直流モータのシミュレーションプログラム

### 8. 速度制御システム

速度検出器TGに、直流発電機（DC タコジェネレータ）を用いた比例制御システムを図11に示す。システムは、図9に示すブラシ付き直流モータを用いて、速度検出器、速度誤差増幅器（ゲインA）を付加したものである。ブロック図中、リミッタで示す部分は、モータに印加できる電圧範囲（パワーアンプの最大出力電圧）を示している。また、速度検出器TGの出力には、ノイズを除去するためにフィルタが挿入してある。

このシステムは、外部から与えられる速度指令と速度検出器の出力が、近づくように動作する。ただし、ここに示す比例制御システムでは、速度指令と速度検出値が一致することはない。

このような制御システムでは、誤差増幅器の増幅率Aを大きくすれば、速度指令と速度検出器の値は近づ

くが、図12に示すように振動が発生する。

図13は0.3秒から0.6秒間に0.8Nmの負荷を印加したときの回転速度を示している。

### 9. PID速度制御システム

図11に示す比例制御システムでは、振動が発生するために増幅率Aを大きくすることができない。

図14に示すシステムは、図11に示すシステムにPID（比例・積分・微分）調節器を追加したものである。

#### 9.1 比例項（P部）

比例定数 $K_P$ を用いる。ここでは $K_P = 1$ とする。

図14に示すブロックでは、 $X2A = K_P \times X2$ である。

#### 9.2 積分項（I部）

積分は、速度指令値と速度検出器の値を同じにすることができる。すなわち、増幅率Aが小さい値であっても、速度検出器の出力は速度指令値に等しくなる。

X2の積分値に、積分定数 $K_I$ を乗算する。図14に示すブロックでは、

$$X2Bold = X2Bold + X2 \times dt$$

$$X2B = X2Bold \times K_I$$

とする。

#### 9.3 微分項（D部）

微分は振動を抑制する働きがあり、増幅率Aを大きくしたときに発生する振動を抑制する。

X2の値に、微分定数 $K_D$ を乗算する。図14に示すブロックでは、

$$X2C = (X2 - X2old) / dt \times K_D$$

$$X2old = X2$$

と計算する。

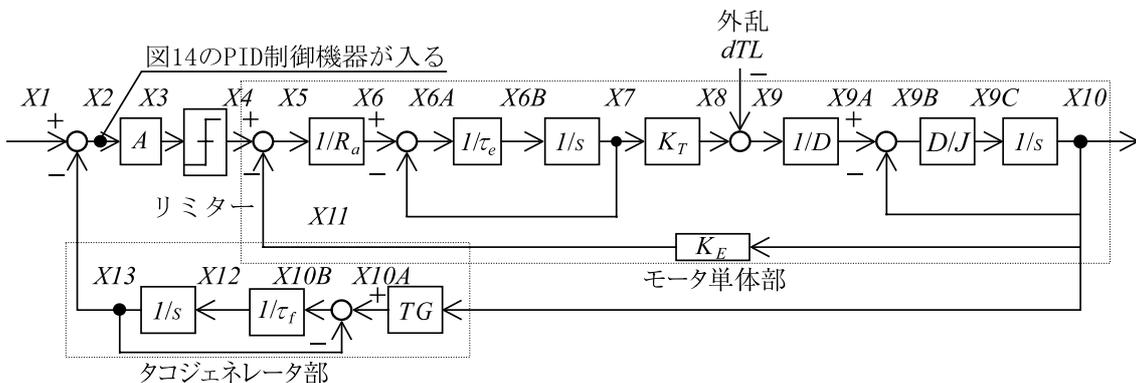


図11 速度制御システムブロック図

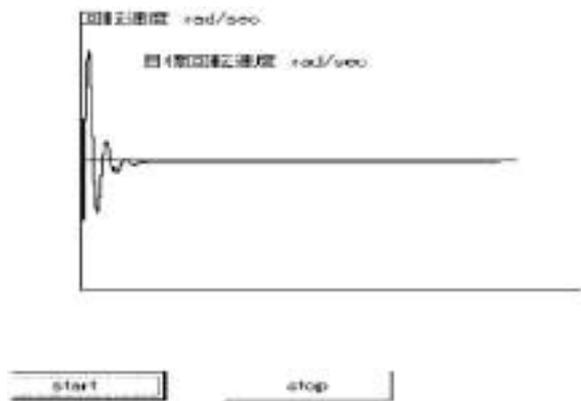


図12 図11のシミュレーション結果

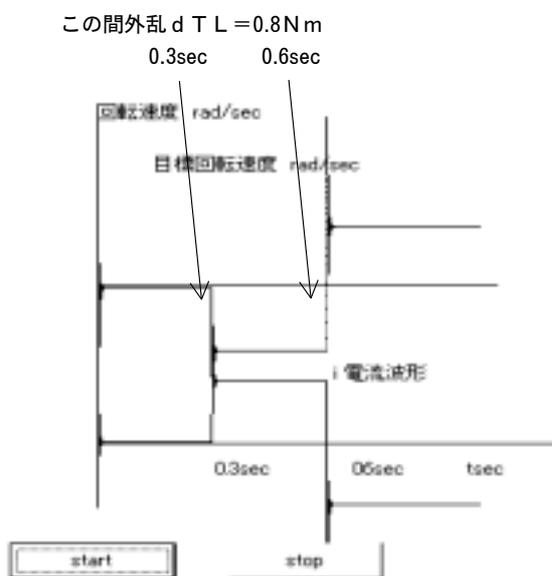


図13 図11のブロック図に負荷をかけた速度変化

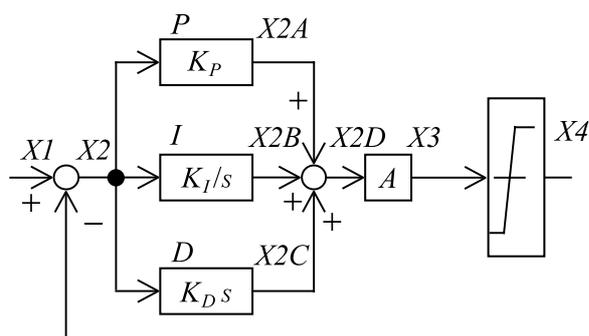


図14 PID制御による速度制御システム

### 10. シミュレーションプログラム

図14に示すブラシ付き直流モータのPID制御による速度制御システムのシミュレーションプログラムを図15に示す。

```

D=0.01
J=0.014
A=100
Ke=0.1
Kt=0.1

Tf=0.01 : /Tfは τf をあらわす
Te=0.00124 : /Teは τe をあらわす。

dt=0.001
TG=1.49
Ra=2.5
X1=10
dt=0.0001
Kp=1
Ki=0.1
Kd=0.2
F or lp=1 to 100000
X2=X1-X13
X2A=X2*Kp : /P I D部のプログラム
X2old=X2old+X2*dt
X2B=X2old*Ki
X2C=(X2-X2old)/dt*Ki
X2old=X2
X2D=X2A+X2B+X2C : /この行でP I D終り
X3=X2D*A
If X3>100 then X4=100 :goto L1
If X3<-100 then X4=-100 :goto L1
X4=X3
L1::X5=X4-X11
X6=X5/Ra
X6A=X6-X7
X6B=X6A/Te
X7=X7old+X6B*dt
X7old=X7
X8=X7*Kt
If lp>=30000 then X9=X8-dTL :goto L2
X9=X8
L2: If lp >60000 then X9=X8+dTL
L3: X9A=X9/D
X9B=X9A-X10
X9C=X9B*D/J
X10=X10old+X9C*dt
X10old=X10
X11=X10*K e
X10A=X10*TG
X10B=X10A-X13
X12=X10B/Tf
l3=X13old+X12*dt
X13old=X13
Pset (lp/30+1000,4000-X10*400)
Pset (Lp/30+1000,4000-X6*70)
Next lp
    
```

図15 P I D制御プログラム

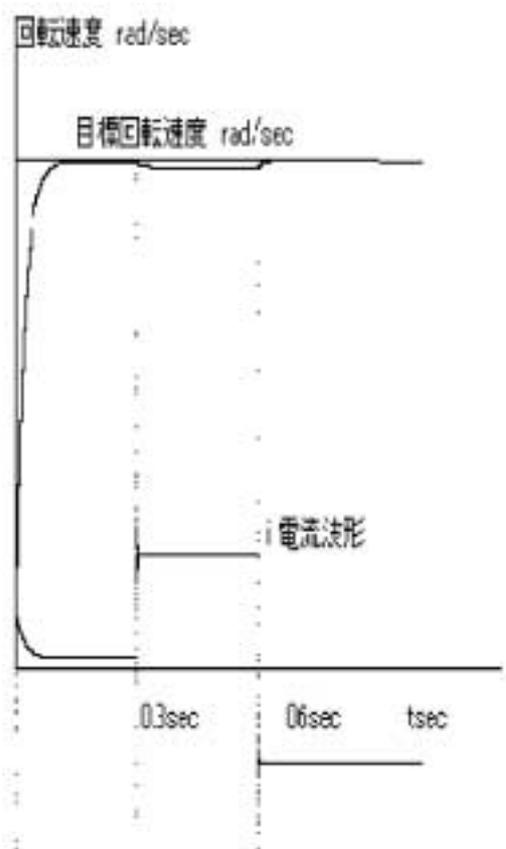


図16 PIDシステム制御結果

プログラム中、 $K_I=0$ 、 $K_D=0$ とすると、図11に示す比例制御となる。

プログラム中、増幅率 $A$ を大きくしていくと振動が発生する。このとき $K_D$ の値を0.001程度から徐々に大きくしていくと振動が減衰できることが確認できる。

また、積分定数 $K_I$ の値を0.1程度から徐々に大きくしていくと、回転速度が指令速度に等しくなることが確認できる。

## 11. 最後に

フィードバック制御という、時間軸の変化を考慮した制御を教育訓練するためには、理論的な解説だけでなく、実機やコンピュータを用いたシミュレーションを見せながら行くと、より教育効果が高い事がわかった。

ここでは、多くの受講生が比較的簡易に利用でき、扱いが簡単なBASIC言語を用いて教材を開発した。その結果、次の結論を得た。

- (1) ラプラス演算子を用いて表したモータ制御システムからそれを計算する手法を学生に示すことが

でき、計算のアルゴリズムを示すことができた。

- (2) パラメータ値を変更しながら、モータの挙動を見ることができ、制御理論との関係を学生に示すことができた。

- (3) BASIC言語を用いたプログラムでは、動作させたくないステートメントの前に' (ダッシュ: コメントとするための記号) をつけるだけで、簡易に一部の命令の実行を無効にできる。そこで、PID制御実験では、微分項 (D制御) や積分項 (I制御) を無効にした場合の挙動を調べたり、パラメータの数値を変更してシミュレーションができるというメリットがあり、その挙動をビジュアル的に見ることができると受講生に強い興味を持たせることができた。

この開発を通して、難解な事柄を教えるためには指導する側も相当の努力と研鑽が必要であることを実感した。今回のテーマは、職業能力開発総合大学校で行われたS型研修の成果であることを申し添え、ご指導いただいた高橋久先生に末筆ながら感謝申し上げます。実際の回路図は、図面の都合により割愛します。